

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО

М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.

Книга знакомит с основными понятиями теории кривых и поверхностей, элементами тензорного исчисления, римановой геометрии и гладких многообразий, а также с некоторыми их приложениями в математике, физике, технике. Материал подробно иллюстрирован примерами и рисунками.

Книга рассчитана на математиков-прикладников, физиков, механиков, инженеров. Предполагается знакомство читателя с аналитической геометрией, линейной алгеброй, дифференциальным и интегральным исчислением.

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1. ТЕОРИЯ КРИВЫХ	8
§ 1. Понятие кривой: простая плоская кривая, плоские кривые, задаваемые параметрически, пространственные кривые, кривая как линия пересечения поверхностей, кривая как годограф векторной функции	8
§ 2. Гладкие и регулярные кривые: касательная к кривой, гладкие кривые, дифференцирование и интегрирование векторных функций, достаточные условия гладкости кривой, регулярные кривые	16
§ 3. Длина дуги кривой: определение и основные свойства, достаточные условия спрямляемости	22
§ 4. Соприкасающаяся плоскость: определение соприкасающейся плоскости, достаточные условия существования соприкасающейся плоскости, главная нормаль и бинормаль кривой, основной триэдр	28
§ 5. Кривизна и кручение. Формулы Френе: кривизна кривой, кручение кривой, формулы Френе, вид кривой вблизи данной точки, натуральные уравнения кривой	31
§ 6. Соприкосновение кривых: понятие порядка соприкосновения, достаточные условия соприкосновения, соприкасающаяся окружность, эволюта и эвольвента плоской кривой	41
Сводка основных понятий, формул, фактов	50
Упражнения	54
Глава 2. ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ	59
§ 1. Понятие поверхности: плоские области, простая поверхность, локально простая поверхность, общая поверхность	58
§ 2. Гладкие и регулярные поверхности: касательная плоскость к поверхности, гладкие поверхности, дифференцирование и интегрирование векторных функций двух аргументов, дифференцируемость векторной функции и касательная плоскость, достаточные условия гладкости поверхности, регулярные поверхности	68
§ 3. Первая квадратичная форма поверхности. Измерения на поверхности: первая квадратичная форма поверхности, длина кривой на поверхности, угол между кривыми на поверхности, площадь	74

поверхности, внутренняя геометрия поверхности, изометричные поверхности	
§ 4. Вторая квадратичная форма: определение второй квадратичной формы, классификация точек регулярной поверхности, кривизна кривой на поверхности, индикатриса Дюпена, главные кривизны, линии кривизны, формула Родрига, асимптотические направления, асимптотические линии, формула Эйлера, средняя и гауссова кривизны, поверхности вращения	81
§ 5. Основные уравнения теории поверхностей: деривационные формулы, основные уравнения теории поверхностей, теорема Бонне	105
§ 6. Внутренняя геометрия поверхности: геодезическая кривизна кривой на поверхности, геодезические линии, полугеодезические координатные системы, полугеодезические полярные координаты, экстремальные свойства геодезических, поверхности постоянной кривизны	117
Сводка основных понятий, формул, фактов	128
Упражнения	135
Глава 3. ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ (АППАРАТ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ)	138
А. Линейное (векторное) пространство	138
§ 1. Понятие тензора: примеры, определение тензора, корректность определения тензора, равенство тензоров	138
§ 2. Алгебраические операции над тензорами: определение алгебраических операций над тензорами, правило суммирования, теорема об алгебраических операциях над тензорами, операции над кососимметричными тензорами, внешние формы	145
§ 3. Метрический тензор: метрическая структура линейного пространства, опускание и поднятие индексов	158
Б. Аффинное (точечное) пространство	162
§ 4. Тензоры в точечных пространствах: точечное пространство, аффинные координаты, тензоры в точечном пространстве	162
§ 5. Тензорное поле	167
§ 6. Криволинейные координаты: криволинейные координаты в точечном пространстве, тензоры в криволинейных координатах, о способе задания тензорного поля	167
§ 7. Метрический тензор в точечном пространстве: метрический тензор в криволинейных координатах, длина дуги гладкой кривой, вычисление объема	178
§ 8. Символы Кристоффеля: определение, специальные системы координат, символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода	183
§ 9. Ковариантное дифференцирование: определение операции ковариантного дифференцирования, свойства операции ковариантного дифференцирования, тензор Римана — Кристоффеля	189

типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ковариантное дифференцирование и метрический тензор,

тензор Римана — Кристоффеля типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

В. Арифметическое (координатное) пространство 199

§ 10. Тензоры в координатном пространстве: координатное пространство, преобразования координат, понятие тензора, основные алгебраические операции над тензорами, метрический тензор в координатном) пространстве, символы Кристоффеля и операция ковариантного дифференцирования, тензор Римана — Кристоффеля 199

Упражнения 205

Глава 4. РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ 207

§ 1. Риманово пространство: определение римановой метрики, примеры римановых пространств 207

§ 2. Первоначальные сведения о римановой геометрии: касательное пространство, преобразование координат в римановом и касательном пространствах, локально нормальные координаты, каноническое разложение метрического тензора 209

§ 3. Параллельный перенос векторов и тензоров: параллельный перенос векторов в евклидовом пространстве, векторы в римановом пространстве, параллельный перенос векторов в римановом пространстве, параллельный перенос тензоров, абсолютный дифференциал и абсолютная производная, техника абсолютного дифференцирования, еще раз о параллельном переносе тензоров, параллельный перенос некоторых важных тензоров 219

§ 4. Геодезические линии в римановом пространстве: геодезические как линии постоянного направления, канонический параметр, геодезические как экстремали 232

§ 5. Специальные системы координат в римановом пространстве: римановы координаты, полугеодезические координаты 238

Сводка основных понятий, формул, фактов 245

Упражнения 247

Глава 5. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ 249

§ 1. Некоторые понятия топологии: топология координатного пространства, топологическое пространство, топологическое подпространство, непрерывное отображение, гомеоморфизм, топологическое произведение, связность, отделимость, компактность, топологическое многообразие 250

§ 2. Гладкие многообразия: основное определение, гладкие функции, разбиение единицы, произведение гладких многообразий 265

§ 3. Касательное пространство: касательный вектор, касательное пространство 274

§ 4. Гладкие отображения: гладкое отображение, диффеоморфизм, 281

дифференциал гладкого отображения, ранг гладкого отображения	
§ 5. Подмногообразия: гладкие подмногообразия, задание многообразий уравнениями	290
§ 6. Векторные и тензорные поля: определение тензорного поля, риманова метрика, внешние дифференциальные формы на многообразии	294
§ 7. Интегрирование по многообразию: ориентация многообразия, многообразии с краем, интеграл от дифференциальной формы по гладкому многообразию, формула Стокса	300
Сводка основных понятий, формул, фактов	308
Упражнения	311
Глава 6. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ	312
§ 1. Движение материальной точки: закон движения материальной точки, скорость и ускорение, движение точки в поле сил, движение точки в параллельном поле сил, движение точки в центральном поле сил, движение в поле сил тяготения, движение заряженной частицы в электромагнитном поле, движение заряженной частицы в постоянном электромагнитном поле	312
§ 2. Некоторые приложения теории поверхностей отрицательной кривизны: чебышёвские сети на поверхности, изометрические погружения плоскости Лобачевского в евклидово пространство E^3 , доказательство теоремы Гильберта о невозможности в евклидовом пространстве E^3 полной плоскости Лобачевского, доказательство существования регулярного решения уравнения синус-Гордона на всей плоскости, геометрическая интерпретация произвольных решений уравнения синус-Гордона, понятие солитонных решений дифференциальных уравнений, физическая интерпретация поверхностей постоянной отрицательной кривизны	323
§ 3. Основные операции векторной алгебры и векторного анализа в тензорных обозначениях: метрический тензор евклидова пространства, операции опускания и поднятия индексов, ортонормированные базисы в пространстве E^n , дискриминантный тензор, ориентированный объем, векторное произведение, двойное векторное произведение, расходимость вектора, оператор Бельтрами — Лапласа, оператор Бельтрами — Лапласа в криволинейных координатах	348
§ 4. Псевдоевклидово и псевдориманово пространства: понятия псевдоевклидова пространства и метрического тензора псевдоевклидова пространства, галилеевы координаты, преобразования Лоренца, пространство Минковского, преобразования Лоренца в пространстве Минковского, псевдориманово пространство, метрический тензор псевдориманова пространства	359
§ 5. Проектирование кривых и поверхностей: уравнение отрезка кривой,	375

уравнение криволинейного четырехугольника, составные кривые,
составные поверхности

Литература

384

От первых истинных и доступных познанию начал постепенно продвигайся при помощи истинных заключений, как это явствует из математических наук, называемых арифметикой и геометрией, то есть числа и меры.

Леонардо да Винчи

...Добытые теоремы наведут нас на мысль о других, более общих, которые будут группироваться вокруг них, подобно тому, как кристалл растет в растворе.

Анри Пуанкаре

Предисловие

Первоначальным побудительным мотивом к написанию книги послужила договоренность о подготовке совместного советско-чехословацкого учебного пособия по дифференциальной геометрии для студентов, обучающихся по физическим, техническим и инженерным специальностям, вычислительной и прикладной математике. Здесь вряд ли стоит касаться причин, по которым от планировавшегося авторского коллектива в написании книги приняла участие только советская сторона. Но, говоря о начале работы, нельзя не вспомнить наших чехословацких коллег, контакты с которыми на этапе формирования структуры будущей книги оказались весьма полезными.

Отсутствие книги, которая сочетала бы достаточную строгость изложения с наглядным описанием истоков вводимых понятий и связей между ними, давно уже ощущалось обоими авторами, ведущими преподавание на физическом факультете и факультете вычислительной математики и кибернетики Московского университета. Цель книги — дать последовательное, доступное для первого знакомства и вместе с тем по возможности строгое изложение современных начал дифференциальной геометрии, заполнить пробел, существующий в учебной литературе такого уровня доступности и широты охвата материала. Сказанным, в частности, объясняется название книги.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, осознавших недостаточность того минимума геометрических сведений, которые предоставляет им обязательная учебная программа по математике. Это потребовало апробации подготавливаемых материалов перед достаточно представительной аудиторией. В течение ряда лет параллельно с работой над книгой была прочитана серия специальных курсов, охватившая в итоге все ее разделы. В числе слушателей были студенты факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета, студенты ряда московских вузов, а также слушатели вечернего специального отделения факультета ВМиК (инженерный поток). Окончательно кни-

га сложилась в ходе чтения этих лекций и многочисленных об- суждений.

Книга включает в себя теорию кривых и поверхностей, основы тензорного исчисления, элементы римановой геометрии и гладких многообразий, некоторые приложения дифференциальной геометрии. Первые пять глав строятся по одинаковой схеме: введение основных понятий, пояснение их простыми примерами и рисунками, разбор связей между введенными понятиями, доказательство нескольких основных теорем. Завершают главу краткая сводка основных понятий, формул, фактов (в третьей главе такой сводкой является раздел В) и небольшая подборка упражнений с ответами. В последнюю, шестую, главу отнесены приложения обсужденных в предшествующих главах понятий к некоторым задачам математики, физики, техники. В целом эта глава носит иллюстративный характер, и далеко не везде в ней доказательства проводятся подробно, а зачастую и отсутствуют вообще.

Охватывая достаточно большой материал, книга сравнительно невелика по объему. При изложении используется в основном классический аппарат дифференциального и интегрального исчисления в обычном объеме, аналитической геометрии и векторной алгебры, линейной алгебры и дифференциальных уравнений. В книге много иллюстраций. По мнению авторов, это делает материал более доступным, помогает более глубокому усвоению обсуждаемых явлений.

Конечно, книга не свободна от недостатков. Некоторые разделы можно было изложить полнее и шире, отыскать более выразительные приложения, рассказать о той важной роли, которую играют геометрические модели в различных областях естествознания и техники. Авторы будут весьма признательны за любые высказанные замечания.

Первая, четвертая и шестая главы, а также § 1—3 второй главы написаны Э. Г. Позняком; третья и пятая главы, а также § 4—6 второй и § 5 шестой глав написаны Е. В. Шикиным.

Литература, которой пользовались авторы при написании книги, а также некоторые книги для дальнейшего изучения указаны в конце. Ссылки на другие источники, в том числе на статьи в отечественных и зарубежных научных журналах, даны непосредственно в тексте.

Начало и конец доказательств утверждений и решений разбираемых в книге задач отмечаются символом *.

Авторы считают своим приятным долгом выразить свою благодарность:

коллегам, обсуждения с которыми были весьма полезны на всех этапах работы над рукописью;

слушателям лекций, общение с которыми, несомненно, повлияло на окончательный отбор материала, последовательность и доступность изложения;

друг другу за постоянно возобновляемое стремление к взаимопониманию.

ТЕОРИЯ КРИВЫХ

Наглядно кривую можно представить как след точки, движущейся по плоскости или в пространстве. Кажется совсем несложным дать этому наглядному представлению простое математическое описание, например определить кривую как непрерывный образ отрезка. Однако существуют примеры, подвергающие такой подход серьезному испытанию: непрерывный образ отрезка может заполнять, в частности, целый квадрат.

Для определения кривой мы изберем следующий путь. Сначала введем понятие простой кривой, затем более общее понятие кривой, заданной параметрически. Чтобы привлечь к изучению свойств введенного класса кривых аппарат дифференциального исчисления, накладываем на кривые ряд дополнительных ограничений геометрического характера. Полученный класс гладких кривых будет обладать свойствами, хорошо согласующимися с наглядными представлениями. Дальнейшие ограничения приводят нас к регулярным кривым. Для этих кривых определяются такие важные скалярные характеристики кривой, как кривизна и кручение. Привлекая их к изучению локального строения кривых, мы получаем целый ряд полезных фактов и соотношений.

§ 1. ПОНЯТИЕ КРИВОЙ

1°. Простая плоская кривая

Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ аргумента (параметра) t непрерывны на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим множество L точек $M(x, y)$, координаты x и y которых определяются соотношениями (рис. 1)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (1)$$

Множество L будем называть *простой плоской кривой*, если различным значениям параметра t из сегмента $[\alpha, \beta]$ отвечают различные точки этого множества.

Будем говорить также: «соотношения (1) определяют простую плоскую кривую L » и «простая плоская кривая L параметризована при помощи соотношений (1)».

Если считать параметр t физической величиной — временем, то простую плоскую кривую можно представлять как траекто-

рию движущейся по плоскости точки, причем эта траектория не имеет точек самопересечения и участков самоналегания.

Точки $M(x, y)$, координаты которых определяются соотношениями (1), назовем *точками кривой L* . Точки A и B , отвечающие граничным значениям α и β параметра t , назовем *граничными точками кривой L* .

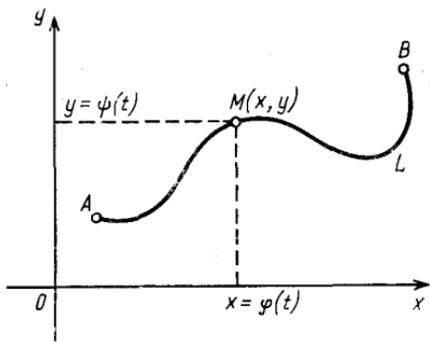


Рис. 1. Точка $M(x, y)$ движется по кривой L от точки A до точки B по закону (1)

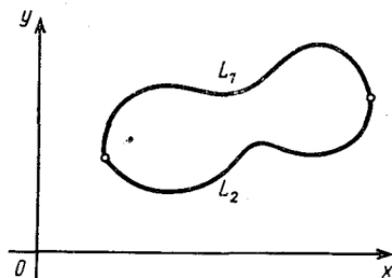


Рис. 2. Простая замкнутая кривая L — объединение простых кривых L_1 и L_2

Примером простой плоской кривой может служить график непрерывной на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции $y=f(x)$. Этот график есть множество точек M , координаты x и y которых определяются соотношениями $x=t$, $y=f(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Ясно, что различным значениям параметра t отвечают различные точки графика.

Замечание 1. Одна и та же простая кривая может быть параметризована различными способами. Можно, например, рассматривать параметризацию простой кривой L , получающуюся из данной ее параметризации $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, путем представления параметра t в виде непрерывной строго монотонной функции другого параметра s : $x=\varphi(t(s))$, $y=\psi(t(s))$, $\alpha_1 \leq s \leq \beta_1$.

Замечание 2. Важным является понятие простой замкнутой плоской кривой. Пусть L_1 и L_2 — две простые плоские кривые, такие, что: 1) каждая из граничных точек кривой L_1 совпадает с одной из граничных точек кривой L_2 ; 2) любые неграничные точки кривых L_1 и L_2 различны. Множество L , полученное объединением кривых L_1 и L_2 , называется *простой замкнутой плоской кривой*. Простая замкнутая плоская кривая также может быть параметризована при помощи соотношений вида (1) (рис. 2).

2°. Плоские кривые, задаваемые параметрически

Источком такого способа задания кривых служит представление о кривой как о совокупности последовательных положений движущейся точки. Обратимся к примеру.

Пример 1. Совокупность последовательных положений точки $M(x, y)$, движущейся по плоскости при изменении параметра t от $-\infty$ до $+\infty$ по закону

$$x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = at \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad a > 0,$$

представляет собой кривую, называемую *строфоидой*. Заметим, что при изменении параметра t в указанных пределах движущаяся по строфоиде точка $M(x, y)$ попадает в начало координат $O(0, 0)$ дважды: при $t = -1$ и при $t = +1$. Так как мы рассматриваем здесь последовательные положения движущейся точки, то точки строфоиды, отвечающие этим различным значениям параметра t , считаются различными: каждая точка на строфоиде как бы помечается отвечающим этой точке значением параметра t (рис. 3).

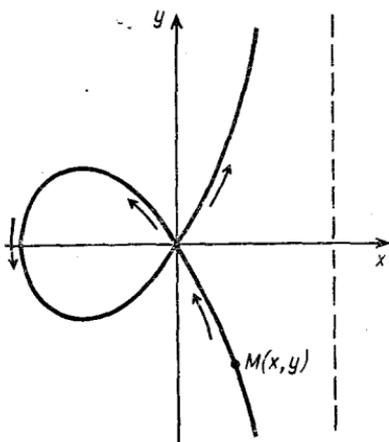


Рис. 3. Строфоида: указан порядок прохождения кривой при изменении параметра t от $-\infty$ до $+\infty$

Строфоиду можно представить как объединение простых плоских кривых. В самом деле, разобьем область изменения параметра t , т. е. числовую прямую \mathbf{R} , на частичные сегменты $[n, n+1]$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Когда параметр t изменяется на каждом таком сегменте, то соответствующая часть строфоиды — простая кривая. Ясно, что объединение всех таких частей представляет собой всю строфоиду (рис. 4). *

Перейдем теперь к определению кривой, задаваемой параметрически.

Будем считать, что область $\{t\}$ изменения параметра t — связное множество на прямой:

- 1) сегмент;
- 2) полусегмент (полуинтервал) или замкнутая полупрямая;
- 3) интервал, открытая полупрямая или вся прямая.

Под разбиением \mathcal{D} области $\{t\}$ изменения параметра t на частичные сегменты будем понимать следующую процедуру.

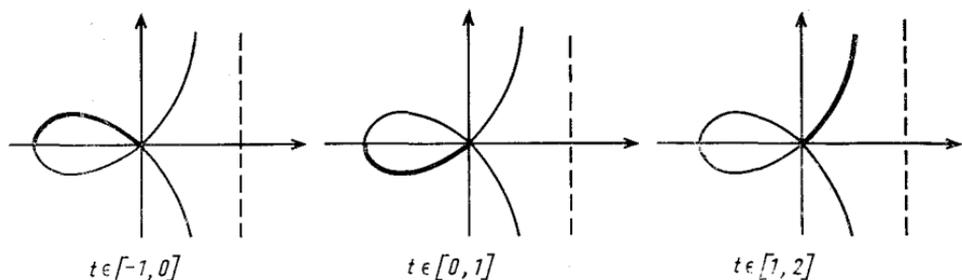


Рис. 4. Простые участки прямой строфоиды

В случае 1) сегмент $[a, b]$ разбивается на частичные сегменты $[t_i, t_{i+1}]$ при помощи конечного числа точек $a=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n=b$.

В случае 2) полуотрезок $[a, b]$ или полулуч $[a, +\infty)$ разбивается на частичные сегменты $[t_i, t_{i+1}]$ при помощи точек $a=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$, причем $t_n \rightarrow b$ для полуотрезка $[a, b]$ и $t_n \rightarrow +\infty$ для полулуча $[a, +\infty)$; для полуотрезка $(a, b]$ и полулуча $(-\infty, b]$ разбиение производится при помощи точек $\dots < t_{-n} < \dots < t_{-2} < t_{-1} < t_0=b$, причем $t_{-n} \rightarrow a$ для полуотрезка и $t_{-n} \rightarrow -\infty$ для полулуча.

В случае 3) разбиение интервала (a, b) , открытой полулуча $(a, +\infty)$ или всей прямой $(-\infty, +\infty)$ на частичные сегменты $[t_i, t_{i+1}]$ строится при помощи точек $\dots < t_{-n} < t_{-n+1} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < \dots$, причем

$$t_{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \quad t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \quad \text{для интервала } (a, b),$$

$$t_{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \quad t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{для полулуча } (a, +\infty),$$

$$t_{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty, \quad t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{для прямой } (-\infty, +\infty);$$

$$\text{для полулуча } (-\infty, b) \quad t_{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \quad t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b.$$

Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ параметра t непрерывны на связном множестве $\{t\}$.

Будем говорить, что соотношения

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \{t\}, \quad (2)$$

представляют собой *параметрические уравнения* плоской кривой L , если существует такое разбиение \mathcal{D} области $\{t\}$ на частичные сегменты $[t_i, t_{i+1}]$, что при изменении параметра t на каждом та-

ком сегменте соотношения (2) определяют простую плоскую кривую. Сама кривая L и есть объединение всех указанных простых кривых (с учетом их возможных самопересечений и самоналожений) при условии монотонного изменения параметра t по множеству $\{t\}$.

При этом говорят, что кривая L задана параметрически при помощи соотношений (2).

Пример 2. Соотношения

$$x=e^{-t} \cos t, \quad y=0, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (3)$$

представляют собой параметрически заданную кривую.

* Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующее разбиение области $\{t\}=[0, +\infty)$ на частичные сегменты: $[t_i, t_{i+1}]$, $i=0, 1, 2, \dots$, где $t_i=\pi i$. Если t изменяется на таком сегменте, то соотношения (3) определяют простую кривую — сегмент оси Ox с граничными точками $e^{-\pi i} \cos \pi i$ и $e^{-\pi(i+1)} \cos \pi(i+1)$. Кривая L , определяемая параметрическими уравнениями (3), — это траектория точки, совершающей затухающие колебания на оси Ox с амплитудами $1, e^{-\pi}, e^{-2\pi}, \dots$ (рис. 5). *

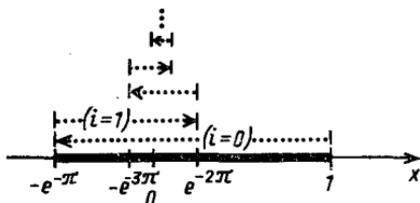


Рис. 5. Схематическое изображение кривой, имеющей бесконечное число участков самоналожения

Пример 3. Рассмотрим кривую L , заданную параметрически при помощи соотношений

$$x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi. \quad (4)$$

Система сегментов $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, $[3\pi, 4\pi]$ разбивает множество $\{t\}=[0, 4\pi]$. Для значений t из каждого сегмента этой системы соотношения (4) определяют простую кривую (полуокружность). Ясно, что L — окружность, дважды обходимая против часовой стрелки. *

3°. Пространственные кривые

Понятие пространственной кривой вводится в полной аналогии с понятием плоской кривой.

Простой пространственной кривой называется множество L точек M пространства, координаты x, y и z которых определяются соотношениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (5)$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — функции, непрерывные на сегменте $[\alpha, \beta]$, если различным значениям параметра t из сегмента $[\alpha, \beta]$ отвечают различные точки этого множества.

Используя понятия простой пространственной кривой и разбиения связного множества $\{t\}$ изменения параметра, приходим так же, как и в случае плоскости, к понятию пространственной кривой, задаваемой параметрическими соотношениями вида (5) при условии монотонного изменения параметра t на множестве $\{t\}$.

Соотношения (5) называют *параметрическими уравнениями пространственной кривой*.

З а м е ч а н и е. В n -мерном евклидовом пространстве E^n кривые определяются при помощи соотношений

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t),$$

где параметр t изменяется на некотором связном множестве $\{t\}$, а функции $\varphi_i(t)$ непрерывны.

4°. Кривая как линия пересечения поверхностей

Пусть $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ — уравнения поверхностей Φ_1 и Φ_2 соответственно.

Систему

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0, \\ F_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

можно рассматривать как уравнения линии пересечения поверхностей Φ_1 и Φ_2 — кривой L (рис. 6).

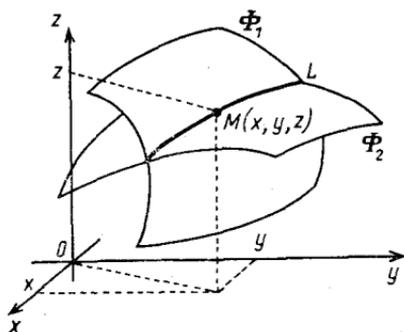


Рис. 6. Пространственная кривая как линия пересечения поверхностей

Действительно, уравнениям (6) удовлетворяют координаты x , y , z любой точки M этой кривой.

Если разрешить систему уравнений (6) относительно, например, y и z , т. е. найти y и z как функции x :

$$y = \psi(x), \quad z = \chi(x),$$

(это возможно в некоторой окрестности точки M кривой L при условии

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

в самой точке M) и затем выбрать x за параметр t , то мы получим параметрические уравнения кривой

$$x = t, \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Пример. Кривая Вивиани представляет собой линию пересечения сферы радиуса a и круглой цилиндрической поверхности диаметра a , одна из образующих которой проходит через центр сферы. Если поместить начало координат в центр этой сферы, а ось Oz направить по образующей цилиндрической поверхности, то уравнения сферы Φ_1 и цилиндрической поверхности Φ_2 примут вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Это и есть уравнения кривой Вивиани (рис. 7).

Если выбрать x за параметр t , то из приведенной системы получим параметрические уравнения отдельных частей (в зависимости от выбора знаков перед корнями) кривой Вивиани*:

$$x = t, \quad y = \pm \sqrt{at - t^2}, \quad z = \pm \sqrt{a^2 - at}, \quad 0 \leq t \leq a. \quad *$$

5°. Кривая как годограф векторной функции

Пусть $\{t\}$ — связное множество точек на прямой \mathbf{R} (сегмент, полусегмент, интервал, открытая или замкнутая полупрямая, вся прямая).

Будем говорить, что на множестве $\{t\}$ задана *векторная функция* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, если каждому значению $t \in \{t\}$ по определенному правилу ставится в соответствие вектор $\mathbf{r}(t)$. Если откладывать все векторы от начала координат, то при изменении параметра t по множеству $\{t\}$ конец M вектора $\mathbf{r}(t)$ опишет некоторое множество $\{M\}$, которое называется *годографом* векторной функции $\mathbf{r}(t)$ (рис. 8).

Для векторных функций в полной аналогии со скалярными функциями вводятся понятия предела и непрерывности.

* Вивиани (Viviani) Винченцо (5.4.1622—22.9.1703) — итальянский математик и физик.

Сформулируем соответствующие определения.

Вектор \mathbf{b} называется *пределом* векторной функции $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ при $t \rightarrow \alpha$ (в точке α), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $t \in \{t\}$, удовлетворяющих условию $0 < |t - \alpha| < \delta$, выполняется неравенство $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$.

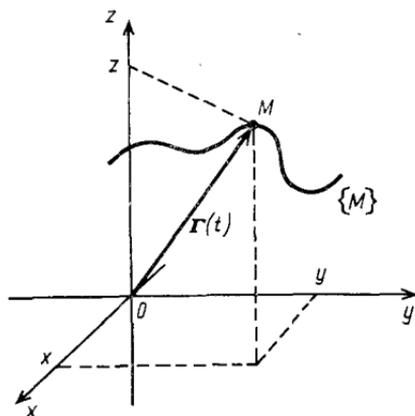
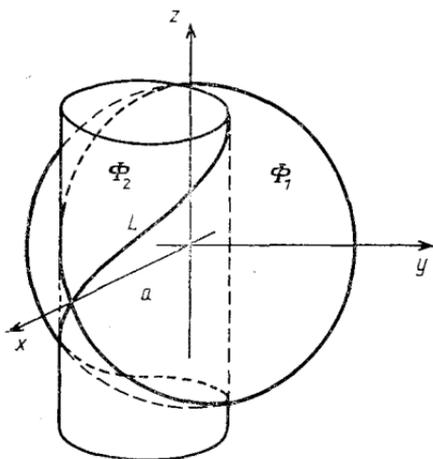


Рис. 7. Кривая Вивиани — линия пересечения сферы и цилиндра

Рис. 8. Годограф векторной функции

Обозначения: $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{b}, \lim_{t \rightarrow \alpha} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$.

Векторная функция $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной в точке* $t_0 \in \{t\}$, если $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t_0)$. Векторная функция называется *непрерывной на множестве* $\{t\}$, если она непрерывна в каждой его точке.

Пусть задана векторная функция $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t), t \in \{t\}$. Тогда координаты x, y, z переменного вектора $\mathbf{r}(t)$ также будут функциями параметра $t \in \{t\}$:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (7)$$

При этом если $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей, то

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t) \mathbf{i} + \psi(t) \mathbf{j} + \chi(t) \mathbf{k}.$$

Отметим, что если функции (7) заданы, то их можно считать координатами векторной функции $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$. Легко видеть, что если $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{b}$, то функции (7) имеют пределы при $t \rightarrow \alpha$, равные соответствующим координатам вектора \mathbf{b} . Из непрерывности $\mathbf{r}(t)$ в точке α следует непрерывность функций (7) в точке α . Верно и обратное: из существования пределов при $t \rightarrow \alpha$ функций (7) вытекает существование предела при $t \rightarrow \alpha$ векторной функции $\mathbf{r}(t)$ с координатами (7). Аналогично и для непрерывности.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если векторные функции $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ и скалярная функция $\lambda(t)$ непрерывны, то функции $\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{R}(t)$, $\lambda(t)\mathbf{r}(t)$, $(\mathbf{r}(t), \mathbf{R}(t))$, $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{R}(t)$ также непрерывны.

* Докажем, например, непрерывность функции $(\mathbf{r}(t), \mathbf{R}(t))$.

Пусть $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — координаты векторной функции $\mathbf{r}(t)$ и $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, $X(t)$ — координаты векторной функции $\mathbf{R}(t)$. Тогда

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{R}(t)) = \varphi(t)\Phi(t) + \psi(t)\Psi(t) + \chi(t)X(t).$$

Так как из непрерывности скалярных функций следует непрерывность их произведения и суммы, то из последнего равенства можно заключить, что скалярное произведение $(\mathbf{r}(t), \mathbf{R}(t))$ непрерывно. *

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — непрерывная на сегменте $[\alpha, \beta]$ векторная функция. В случае, когда различным значениям параметра t из этого сегмента отвечают различные значения векторной функции, ее годограф — простая кривая. Можно говорить также, что кривая, заданная параметрически при помощи соотношений (7), является годографом векторной функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ с координатами (7). Иными словами, параметрическое и векторное задания кривой равносильны.

Мы будем использовать следующую терминологию: «кривая L задана векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ » или « $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — вектор кривой L ».

§ 2. ГЛАДКИЕ И РЕГУЛЯРНЫЕ КРИВЫЕ

1°. Касательная к кривой

Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in \{t\} \quad (1)$$

(функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывны на множестве $\{t\}$). Обозначим через M_0 точку кривой L , отвечающую значению t_0 параметра, а через M — точку кривой L , отвечающую значению t параметра из некоторой окрестности значения t_0 . Ясно, что $M \rightarrow M_0$, если $t \rightarrow t_0$.

Прямая M_0T называется *касательной к кривой L в точке M_0* , если при $M \rightarrow M_0$ меньший угол θ между этой прямой и переменной прямой M_0M стремится к нулю (рис. 9).

2°. Гладкие кривые

Кривая L называется *гладкой в точке M_0* , если в этой точке существует касательная к кривой L и некоторая окрестность точки M_0 на кривой L однозначно проектируется на эту касательную.

Точки кривой, в которых она не является гладкой, называются *особыми* (рис. 10).

Кривая L называется *гладкой*, если она является гладкой в каждой точке и касательные в точках кривой L изменяются непрерывно. Последнее означает, что если M и N — любые точки

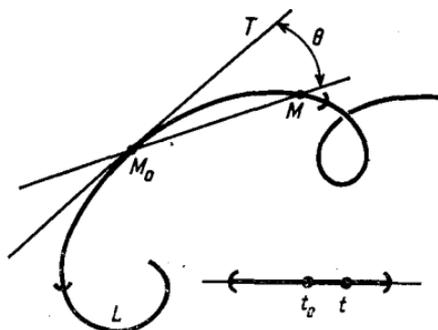


Рис. 9. Окрестность точки M_0 на кривой L — множество точек M кривой, отвечающих значениям t параметра из окрестности t_0 ; M_0T — касательная к кривой L в точке M_0

кривой L , то при $M \rightarrow N$ касательная в точке M стремится к касательной в точке N (наименьший угол между этими касательными стремится к нулю).

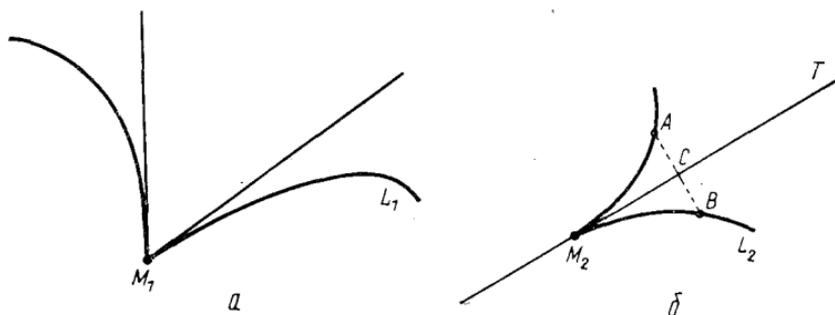


Рис. 10. а — кривая L_1 не имеет касательной в точке M_1 ; б — в точке M_2 кривая L_2 имеет касательную M_2T , но никакая окрестность точки M_2 на кривой L_2 не проектируется однозначно на M_2T (например, точки A и B проектируются в одну и ту же точку C)

Пример. Кривая

$$y = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

гладкая в любой своей точке, но никакая окрестность точки $O(0, 0)$ не является гладкой кривой.

3°. Дифференцирование и интегрирование векторных функций

Пусть векторная функция $\mathbf{r}(t)$ определена на множестве $\{t\}$.

Говорят, что векторная функция $\mathbf{r}(t)$ имеет производную в точке t , если существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Обозначения: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{r}'(t)$.

Геометрический смысл производной векторной функции ясен из рис. 11.

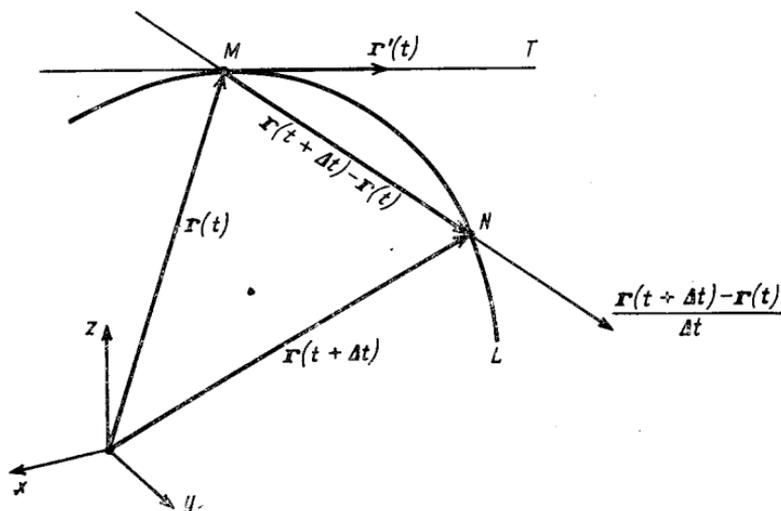


Рис. 11. Вектор $\mathbf{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу векторной функции $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ в точке M .

Если $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, то существует касательная к годографу L векторной функции $\mathbf{r}(t)$ в точке M , отвечающей значению t параметра, и вектор $\mathbf{r}'(t)$ направлен по этой касательной.

Пусть $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — координаты векторной функции $\mathbf{r}(t)$. Если функция $\mathbf{r}(t)$ имеет производную в точке t , то каждая из функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ также имеет производную в точке t . Верно и обратное: если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ имеют производные в точке t , то и векторная функция $\mathbf{r}(t)$ имеет производную в этой точке.

Если каждая из функций $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ и $\lambda(t)$ имеет производную в точке t , то функции $\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{R}(t)$, $\lambda(t)\mathbf{r}(t)$, $(\mathbf{r}(t), \mathbf{R}(t))$, $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{R}(t)$ также имеют производные в этой точке, причем выполняются следующие соотношения:

$$(\mathbf{r} \pm \mathbf{R})' = \mathbf{r}' \pm \mathbf{R}', \quad (\lambda \mathbf{r})' = \lambda' \mathbf{r} + \lambda \mathbf{r}',$$

$$((\mathbf{r}, \mathbf{R}))' = (\mathbf{r}', \mathbf{R}) + (\mathbf{r}, \mathbf{R}'), \quad (\mathbf{r} \times \mathbf{R})' = \mathbf{r}' \times \mathbf{R} + \mathbf{r} \times \mathbf{R}'.$$

Производная векторной функции $\mathbf{r}'(t)$ называется второй производной векторной функции $\mathbf{r}(t)$. Аналогично определяются третья и последующие производные.

Вторая и третья производные обозначаются соответственно через $\mathbf{r}''(t)$ и $\mathbf{r}'''(t)$. Для производных n -го порядка обычно используются обозначения $\mathbf{r}^{(n)}(t)$ или $\frac{d^n \mathbf{r}}{dt^n}$.

Если $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — координаты векторной функции $\mathbf{r}(t)$, то

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = \varphi^{(n)}(t) \mathbf{i} + \psi^{(n)}(t) \mathbf{j} + \chi^{(n)}(t) \mathbf{k}. \quad (2)$$

Если у векторной функции $\mathbf{r}(t)$ существуют и непрерывны все производные до порядка n включительно, то пишут $\mathbf{r}(t) \in C^n$.

Пусть функция $\mathbf{r}(t) \in C^{n-1}$ в некоторой окрестности точки t_0 и существует производная $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)$. Тогда для $\mathbf{r}(t)$ справедлива *формула Тейлора* *:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!} \mathbf{r}''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{1}{n!} \mathbf{r}^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \mathbf{o}((t-t_0)^n), \end{aligned} \quad (3)$$

где вектор $\mathbf{o}((t-t_0)^n)$ имеет более высокий порядок малости, чем $(t-t_0)^n$, т. е.

$$\frac{|\mathbf{o}((t-t_0)^n)|}{(t-t_0)^n} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0.$$

Формула (3) получается так. Разложим координатные функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ вектора $\mathbf{r}(t)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано **:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!} \varphi''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \mathbf{o}((t-t_0)^n), \\ \psi(t) = & \psi(t_0) + \psi'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!} \psi''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{1}{n!} \psi^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \mathbf{o}((t-t_0)^n), \\ \chi(t) = & \chi(t_0) + \chi'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!} \chi''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{1}{n!} \chi^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \mathbf{o}((t-t_0)^n). \end{aligned}$$

* Тейлор (Taylor) Брук (18.8.1685—29.12.1731) — английский математик.
 ** Пеано (Peano) Джузеппе (27.8.1858—20.4.1932) — итальянский математик.

Умножая первое соотношение на орт \mathbf{i} , второе — на орт \mathbf{j} , третье — на орт \mathbf{k} , складывая и используя формулы (1) и (2), получим разложение (3).

Интеграл Римана $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}(t) dt$ для векторной функции $\mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, определяется как предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}(\xi_i) \Delta t_i$$

при $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ ($\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, ξ_i — любая точка сегмента $[t_{i-1}, t_i]$).

Свойства интеграла.

$$1+. \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{r}(t) + \mathbf{R}(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}(t) dt.$$

$$2+. \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(t) \mathbf{i} + \psi(t) \mathbf{j} + \chi(t) \mathbf{k}) dt = \\ = \left(\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_{\alpha}^{\beta} \chi(t) dt \right) \mathbf{k}.$$

$$3+. \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}(t) dt = \int_{\alpha}^{\gamma} \mathbf{r}(t) dt + \int_{\gamma}^{\beta} \mathbf{r}(t) dt \quad (\alpha < \gamma < \beta).$$

$$4+. \int_{\alpha}^{\beta} \lambda \mathbf{r}(t) dt = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}(t) dt \quad (\lambda \text{ — число}).$$

5+. Если \mathbf{r} — постоянный вектор, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{r}, \mathbf{R}(t)) dt = \left(\mathbf{r}, \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}(t) dt \right), \quad \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r} \times \mathbf{R}(t) dt = \mathbf{r} \times \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}(t) dt.$$

$$6+. \frac{d}{d\tau} \int_{\alpha}^{\tau} \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{r}(\tau).$$

4°. Достаточные условия гладкости кривой

ТЕОРЕМА 1 (достаточные условия гладкости в точке). Пусть кривая L задана векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, имеющей в некоторой окрестности значения $t_0 \in \{t\}$ непрерывную производную $\mathbf{r}'(t)$, причем $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$. Тогда кривая L является гладкой кривой в точке M_0 , отвечающей значению t_0 .

* Касательная M_0T к кривой L в точке M_0 существует в силу того, что $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ (см. п. 3°). Поэтому достаточно показать, что некоторая окрестность точки M_0 на кривой L однозначно проектируется на эту касательную.

Предположим, что это не так. Тогда существуют две различные последовательности $t'_k \rightarrow t_0$, $t''_k \rightarrow t_0$, такие, что разности $\mathbf{r}(t''_k) - \mathbf{r}(t'_k)$ ортогональны вектору $\mathbf{r}'(t_0)$. По формуле Тейлора (3) с центром разложения t'_k при $n=1$ имеем

$$\mathbf{r}(t''_k) = \mathbf{r}(t'_k) + \mathbf{r}'(t'_k)(t''_k - t'_k) + o(t''_k - t'_k).$$

Вычитая $\mathbf{r}(t'_k)$, получим следующее выражение для разности:

$$\mathbf{r}(t''_k) - \mathbf{r}(t'_k) = \mathbf{r}'(t'_k)(t''_k - t'_k) + o(t''_k - t'_k).$$

Умножим последнее равенство скалярно на $\mathbf{r}'(t_0)$. Учитывая свойства o -символа и ортогональность разности $\mathbf{r}(t''_k) - \mathbf{r}(t'_k)$ вектору $\mathbf{r}'(t_0)$, после несложных преобразований получим, что

$$(\mathbf{r}'(t'_k), \mathbf{r}'(t_0))(t''_k - t'_k) = o(t''_k - t'_k).$$

Так как $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ и $\mathbf{r}'(t'_k) \rightarrow \mathbf{r}'(t_0)$ при $t'_k \rightarrow t_0$, то левая часть последнего равенства есть $O(t''_k - t'_k)$, в то время как правая — $o(t''_k - t'_k)$. Полученное противоречие есть следствие предположения, что никакая окрестность точки M_0 на кривой L не может быть однозначно спроектирована на касательную в точке M_0 .

Тем самым в точке M_0 существует касательная к кривой L и некоторая окрестность точки M_0 на кривой L однозначно проектируется на эту касательную. Значит, кривая L гладкая в точке M_0 . *

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия гладкости кривой). Пусть кривая L задана векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \{t\}$, имеющей непрерывную производную $\mathbf{r}'(t)$. Если $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ для любого $t \in \{t\}$, то кривая L гладкая.

* Поскольку $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, то согласно теореме 1 кривая L является гладкой в любой своей точке. Из условия $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ и непрерывности $\mathbf{r}'(t)$ следует непрерывность касательной к кривой L . Значит, L — гладкая кривая. *

5°. Регулярные кривые

Пусть гладкая кривая L задана векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Если $\mathbf{r}(t) \in C^n$, $n \geq 2$, то кривая L называется *регулярной кривой (кривой класса C^n)*.

Достаточные условия регулярности кривой.

Для того чтобы заданная векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \{t\}$, кривая L была регулярной, достаточно, чтобы на множестве $\{t\}$ изменения параметра были выполнены следующие условия: $\mathbf{r}(t) \in C^n$, $n \geq 2$, и $\mathbf{r}'(t) \neq 0$.

Эти условия вытекают из достаточных условий гладкости (теорема 2) и определения регулярности.

З а м е ч а н и е. Если производная $\mathbf{r}'(t)$ непрерывна и $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, то $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ в некоторой окрестности значения t_0 . Если, кроме того, $\mathbf{r}(t) \in C^n$, $n \geq 2$, на множестве $\{t\}$, то в окрестности точки M_0 , отвечающей значению t_0 , кривая L регулярная. Тем самым условия $\mathbf{r}(t) \in C^n$, $n \geq 2$, и $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ являются условиями локальной регулярности кривой.

§ 3. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

1°. Определение и основные свойства

Пусть L — простая кривая, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, — ее радиус-вектор.

Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на части точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

Отметим на кривой L точки M_i , отвечающие значениям t_i , и построим ломаную $M_0 M_1 \dots M_{n-1} M_n$, вписанную в кривую L (рис. 12).

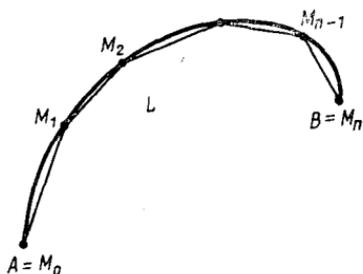


Рис. 12. Ломаная $M_0 M_1 \dots M_{n-1} M_n$ правильно вписана в кривую L

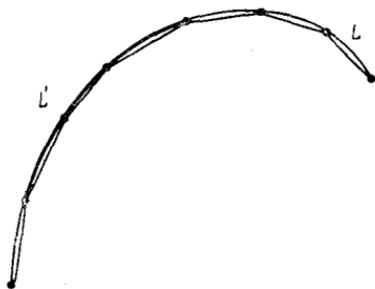


Рис. 13. Всякую ломаную, правильно вписанную в простую кривую L' , можно достроить до ломаной, вписанной в кривую L

О п р е д е л е н и е. Кривая L называется *спрямляемой*, если множество длин всевозможных ломаных, вписанных в простую кривую L указанным выше способом, ограничено. Точная верхняя грань этого множества называется *длиной дуги кривой L* или просто *длиной кривой L* .

Свойства длины дуги кривой.

1+. Если простая кривая L' является частью спрямляемой простой кривой L , то кривая L' также спрямляема.

* Всякая ломаная, вписанная в L' , является частью ломаной, вписанной в L (рис. 13). Поэтому множество длин ломаных, вписанных в кривую L' , ограничено, т. е. кривая L' спрямляема.

Ясно, что длина дуги кривой L' меньше длины дуги кривой L . *

2+. Если простая кривая L разбита точкой N на спрямляемые части L' и L'' , то кривая L спрямляема и для длин $s(L')$, $s(L'')$ и $s(L)$ дуг кривых L' , L'' и L выполняется соотношение

$$s(L') + s(L'') = s(L).$$

* Рассмотрим произвольную ломаную, вписанную в кривую L (рис. 14). Добавим к ее вершинам точку N . Получим новую ломаную, длина которой больше длины исходной ломаной и равна сумме длин ломаных, вписанных в кривые L' и L'' . Отсюда следует, что множество длин ломаных, вписанных в кривую L , ограничено сверху числом $s(L') + s(L'')$. Так как мы всегда можем выбрать вписанную в кривую L и содержащую вершину N ломаную так, что ее длина будет отличаться от $s(L') + s(L'')$ меньше чем на заданную положительную величину, то $s(L') + s(L'')$ — точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в кривую L . Тем самым $s(L) = s(L') + s(L'')$. *

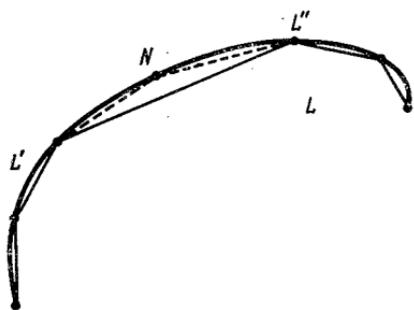


Рис. 14. Объединение ломаных, вписанных в кривые L' и L'' , правильно вписано в кривую $L = L' \cup L''$

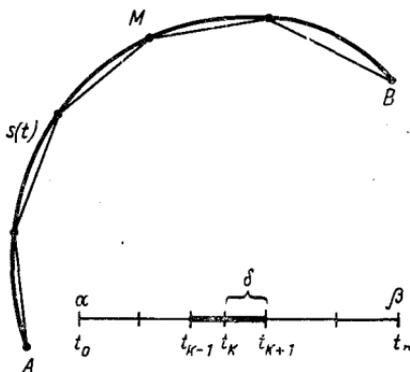


Рис. 15. Разбиению отрезка изменения параметра соответствует вписанная в кривую ломаная

Пусть A и B — граничные точки спрямляемой кривой L , M — точка кривой L , соответствующая некоторому значению t из сегмента $[\alpha, \beta]$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — координаты векторной функции $\mathbf{r}(t)$.

Обозначим через $s(t)$ длину дуги кривой $\overset{\frown}{AM}$ (рис. 15).

3+. Функция $s(t)$ строго монотонна и непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$ и положительна при $t > \alpha$.

* Положительность $s(t)$ очевидна.

Монотонность вытекает из свойства 2+.

Доказательство непрерывности предварим вспомогательными рассмотрениями.

а) Пусть ε — любое положительное число. Из определения длины дуги вытекает существование вписанной в кривую L ломаной, длина которой отличается от длины кривой L меньше чем на $\varepsilon/2$. Естественно рассматривать ломаную, имеющую точку M одной из своих вершин.

Ясно, что и длина части этой ломаной, вписанной в кривую \widehat{AM} , отличается от ее длины $s(t)$ меньше чем на $\varepsilon/2$.

Конечно, длина любого звена рассматриваемой ломаной отличается от длины стягиваемой ею дуги меньше чем на $\varepsilon/2$.

б) Длины звеньев ломаной со свойством а) можно считать меньше $\varepsilon/2$. Действительно, из свойства равномерной непрерывности координат $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ радиуса-вектора $\gamma(t)$ кривой L на сегменте $[\alpha, \beta]$ вытекает, что по данному $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число δ , что при разбиении сегмента $[\alpha, \beta]$ на частичные сегменты $[t_{i-1}, t_i]$, $i=1, 2, \dots, n$, с длинами меньше δ колебания функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ на каждом частичном сегменте $[t_{i-1}, t_i]$ будут меньше $\varepsilon/(2\sqrt{3})$. Тогда длина i -го звена ломаной будет меньше $\varepsilon/2$:

$$\sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2 + [\chi(t_i) - \chi(t_{i-1})]^2} < \varepsilon/2.$$

в) Рассмотрим ломаную со свойствами а) и б). Дуга, стягиваемая произвольным звеном этой ломаной, имеет длину, меньшую ε . В самом деле, по свойству а) длина такой дуги отличается от длины стягивающего ее звена меньше, чем на $\varepsilon/2$, а по свойству б) длина любого звена меньше $\varepsilon/2$.

Докажем теперь непрерывность функции $s(t)$.

По данному $\varepsilon > 0$ построим ломаную со свойствами а), б), в) и соответствующее этой ломаной разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$. Пусть точка M на кривой L отвечает значению $t=t_k$. Обозначим через δ наименьшую из длин сегментов $[t_{k-1}, t]$, $[t, t_{k+1}]$. Если $0 < \Delta t < \delta$, то $s(t) < s(t + \Delta t) < s(t_{k+1})$. Отсюда вытекает, что

$$0 < s(t + \Delta t) - s(t) < s(t_{k+1}) - s(t) < \varepsilon,$$

так как длина дуги, стягиваемой звеном ломаной, меньше ε .

Случай $-\delta < \Delta t < 0$ рассматривается аналогично.

Таким образом,

$$|s(t + \Delta t) - s(t)| < \varepsilon,$$

если только $|\Delta t| < \delta$.

В силу произвольности выбора точки M на кривой L непрерывность функции $s(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ доказана. *

Пусть S — длина кривой L . Вследствие того что функция $s = s(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ строго возрастает от нуля до S и непрерывна, на сегменте $[0, S]$ существует строго возрастающая и непрерывная функция $t=t(s)$. Это означает, что параметр t на спрямляемой кривой есть строго монотонная и непрерывная функция длины дуги s . Отсюда следует, что на спрямляемой простой кривой в качестве параметра может быть выбрана длина дуги s .

Такая параметризация спрямляемой кривой называется *натуральной* или *естественной*, а параметр s (длина дуги) — *натуральным параметром*.

Задача. Доказать, что для спрямляемости простой кривой L необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ были функциями ограниченной вариации.

Замечание. Понятие длины дуги можно ввести и для кривых, заданных параметрически. Длина дуги такой кривой по определению равна сумме длин простых кривых, из которых она составлена, при условии, что эта сумма ограничена. И в этом случае длина дуги может быть параметром на кривой.

2°. Достаточные условия спрямляемости

ТЕОРЕМА 3. Пусть простая кривая L задана векторной функцией $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Тогда если функции $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ непрерывны на сегменте $[\alpha, \beta]$ то кривая L спрямляема и длина ее дуги может быть вычислена по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (1)$$

* Пусть $l(\mathcal{D})$ — длина вписанной в кривую L ломаной, отвечающей разбиению \mathcal{D} сегмента $[\alpha, \beta]$ на частичные сегменты $[t_{i-1}, t_i]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$. Имеем

$$\begin{aligned} l(\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\}^2 + \{\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\}^2 + \{\chi(t_i) - \chi(t_{i-1})\}^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(t'_i) + \psi'^2(t''_i) + \chi'^2(t'''_i)} \Delta t_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где $t'_i, t''_i, t'''_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ (для разностей в фигурных скобках мы применили формулу конечных приращений).

Так как функции $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ непрерывны на сегменте $[\alpha, \beta]$, то они ограничены по абсолютной величине некоторой постоянной C . Поэтому из формулы (2) вытекает, что

$$0 < l(\mathcal{D}) < C\sqrt{3}(\beta - \alpha),$$

т. е. множество длин ломаных, вписанных в кривую L , ограничено. Тем самым L — спрямляемая кривая.

Перейдем к обоснованию формулы (1). Предварительно запишем выражение для интеграла в этой формуле следующим образом:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt = \\
&= \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\bar{t}_i) + \psi'^2(\bar{t}_i) + \chi'^2(\bar{t}_i)} \Delta t_i, \quad (3)
\end{aligned}$$

где $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ (для интегралов под знаком суммы мы воспользовались формулой среднего значения).

Сравним интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt$ и длину ломаной $l(\mathcal{D})$. Из соотношений (2) и (3), воспользовавшись неравенством

$$|\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} - \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}| \leq |a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n|,$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt - l(\mathcal{D}) \right| \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{\varphi'^2(\bar{t}_i) + \psi'^2(\bar{t}_i) + \chi'^2(\bar{t}_i)} - \sqrt{\varphi'^2(t'_i) + \psi'^2(t''_i) + \chi'^2(t'''_i)} \right| \Delta t_i \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^n \{ |\varphi'(\bar{t}_i) - \varphi'(t'_i)| + |\psi'(\bar{t}_i) - \psi'(t''_i)| + |\chi'(\bar{t}_i) - \chi'(t'''_i)| \} \Delta t_i.
\end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — данное число. По свойству равномерной непрерывности функций $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ из последнего соотношения следует, что для всех достаточно мелких разбиений сегмента $[\alpha, \beta]$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt - l(\mathcal{D}) \right| < \varepsilon. \quad (4)$$

Так как S — точная верхняя грань множества $\{l(\mathcal{D})\}$, то среди длин $l(\mathcal{D})$, отвечающих достаточно мелким разбиениям сегмента $[\alpha, \beta]$, найдутся такие, для которых справедливо неравенство (4) и неравенства

$$0 \leq S - l(\mathcal{D}) < \varepsilon. \quad (5)$$

Равенство (1) вытекает из соотношений (4) и (5) в силу произвольности ε . *

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 3 и t — любая точка сегмента $[\alpha, \beta]$. Тогда длина $s(t)$ дуги \overline{AM} , где M — точка кривой L , соответствующая t , равна

$$s(t) = \int_{\alpha}^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau. \quad (6)$$

Из формулы (6) получаем важный вывод.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. Тогда существует функция $t = t(s)$, обратная функции $s = s(t)$ и дифференцируемая столько же раз, сколько и функция $\mathbf{r}(t)$.

* Это следует из правила дифференцирования обратных функций. Например, первая производная

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

выражается через первую производную $\mathbf{r}'(t)$, вторая $\frac{d^2t}{ds^2}$ — через $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ и т. д. *

Таким образом, если L — регулярная кривая класса C^k , то при переходе к натуральному параметру s она также будет регулярной кривой класса C^k .

З а м е ч а н и е. Если длина дуги кривой выбрана за параметр, т. е. $t = s$, то $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ ($r'^2(s) = 1$) и вектор $\mathbf{r}''(s)$ ортогонален вектору $\mathbf{r}'(s)$.

* Действительно, в рассматриваемом случае

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{ds} = |\mathbf{r}'(s)| = 1.$$

Дифференцируя равенство $r'^2(s) = 1$, получим, что $(\mathbf{r}''(s), \mathbf{r}'(s)) = 0$. Последнее означает, что векторы $\mathbf{r}'(s)$ и $\mathbf{r}''(s)$ ортогональны. *

Приведем формулу для длины дуги графика гладкой функции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Дифференциал дуги.

Из формулы (6) дифференцированием по верхнему пределу t интеграла получаем, что

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$s'(t) dt = ds, \quad \varphi'(t) dt = d\varphi, \quad \psi'(t) dt = d\psi, \quad \chi'(t) dt = d\chi,$$

приходим к формуле для дифференциала дуги

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

§ 4. СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ

1°. Определение соприкасающейся плоскости

Соприкасающейся плоскостью кривой L в точке M_0 называется предел, к которому стремится при $M \rightarrow M_0$ переменная плоскость π_M , проходящая через касательную M_0T к кривой L в точке M_0 и текущую точку M кривой L (плоскость π называется *пределом* при $M \rightarrow M_0$ переменной плоскости π_M , проходящей через прямую M_0T и точку M , если угол θ между плоскостями π и π_M стремится к нулю) (рис. 16).

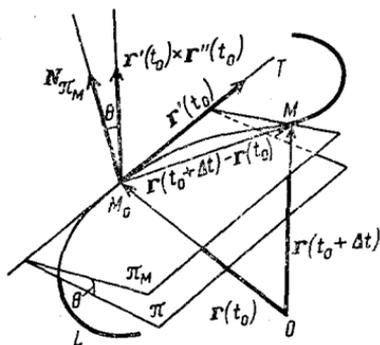


Рис. 16. Вектор $r'(t_0) \times r''(t_0)$ ортогонален соприкасающейся плоскости π , вектор N_{π_M} ортогонален переменной плоскости π_M

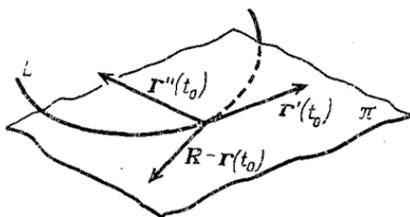


Рис. 17. Кривая и ее соприкасающаяся плоскость

Замечание. Если плоскость π является предельной при $M \rightarrow M_0$ переменной плоскости π_M , то проходящая через точку M_0 нормаль к плоскости π является пределом нормалей к плоскостям π_M , проходящим через точку M_0 . Справедливо и обратное: если существует предел нормалей к переменным плоскостям (проходящим через фиксированную прямую), то существует и предел этих плоскостей.

2°. Достаточные условия существования соприкасающейся плоскости

ТЕОРЕМА 4. Пусть $r = r(t)$ — радиус-вектор кривой L и M_0 — точка этой кривой, отвечающая значению t_0 параметра. Тогда если векторы $r'(t_0)$ и $r''(t_0)$ неколлинеарны, то в точке M_0 существует соприкасающаяся плоскость к кривой L , причем $r'(t_0) \times r''(t_0)$ — вектор нормали к этой плоскости.

* Покажем, что вектор

$$N_{\pi_M} = \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{r}'(t_0) \times (\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0))$$

нормали к переменной плоскости π_M имеет при $M \rightarrow M_0$ пределом вектор $\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0) \neq 0$. Согласно замечанию предыдущего пункта предельный вектор и будет вектором нормали к соприкасающейся плоскости π .

Проведем некоторые преобразования вектора N_{π_M} нормали к плоскости π_M . По формуле Тейлора имеем

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0) \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{r}''(t_0) \Delta t^2 + o(\Delta t^2).$$

Поэтому

$$\mathbf{r}'(t_0) \times (\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)) = \frac{1}{2} \Delta t^2 \{ \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0) + \alpha(\Delta t) \}, \quad (1)$$

где $\alpha(\Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Поделим обе части соотношения (1) на $\frac{1}{2} \Delta t^2$. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е. при $M \rightarrow M_0$, получим, что

$$N_{\pi_M} = \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0) + \alpha(\Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0). *$$

З а м е ч а н и е. Соприкасающейся плоскости можно придать и механический смысл. В начале главы мы говорили о том, что параметрическое (а следовательно, и векторное) задание кривой L может быть интерпретировано как закон механического движения точки по траектории L . Тогда $\mathbf{r}'(t)$ — вектор скорости движущейся точки, а $\mathbf{r}''(t)$ — вектор ее ускорения. Оба этих вектора расположены в соприкасающейся плоскости ($\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ — вектор ее нормали). А так как определение соприкасающейся плоскости не зависит от выбора параметризации (инвариантно), то эту плоскость можно рассматривать как *плоскость ускорений*: при любом законе движения точки по кривой L вектор ее ускорения $\mathbf{r}''(t)$ расположен в одной и той же плоскости — соприкасающейся плоскости к кривой L в точке $M(t)$.

Пусть \mathbf{R} — вектор произвольной точки соприкасающейся плоскости π . Тогда векторы $\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{r}'(t_0)$, $\mathbf{r}''(t_0)$, будучи отложены от точки $M(t_0)$, расположатся в соприкасающейся плоскости π (рис. 17). Поэтому их смешанное произведение будет равно нулю:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0)) = 0. \quad (2)$$

Формула (2) — уравнение соприкасающейся плоскости кривой L в точке M_0 .

Запишем уравнение (2) в координатах.

Если x, y, z — координаты вектора \mathbf{R} , а $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ — координаты вектора $\mathbf{r}(t)$, то соотношение (2) можно записать так:

$$\begin{vmatrix} x - \varphi(t_0) & y - \psi(t_0) & z - \chi(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) & \chi'(t_0) \\ \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) & \chi''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

3°. Главная нормаль и бинормаль кривой. Основной триэдр

Любая прямая, проходящая через точку M кривой L перпендикулярно касательной к кривой L в точке M , называется *нормалью кривой L в точке M* .

Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости кривой L в точке M , называется *главной нормалью*, а нормаль, перпендикулярная этой соприкасающейся плоскости, — *бинормалью*.

Касательная, главная нормаль и бинормаль кривой в данной точке кривой определяют три плоскости, проходящие через эту точку и связанные с кривой. Среди этих плоскостей уже знакомая нам *соприкасающаяся* плоскость. Она проходит через касательную и главную нормаль. Плоскость, проходящая через главную нормаль и бинормаль, называется *нормальной* плоскостью (она содержит все нормали к кривой в этой точке). Плоскость, проходящая через касательную и бинормаль, называется *спрямляющей* плоскостью (рис. 18).

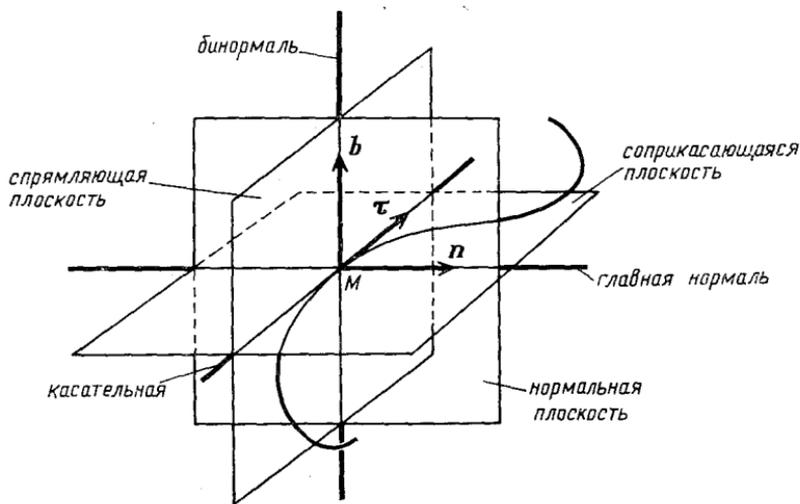


Рис. 18. Векторы τ, n, b отложены от точки M ; тройка τ, n, b — *основной триэдр кривой в точке M*

Эти три плоскости — соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая — определяют *основной триэдр* (трехгранник) кривой.

Пусть τ , \mathbf{n} , \mathbf{b} — тройка единичных попарно ортогональных векторов, отложенных от точки M и направленных соответственно по касательной, главной нормали и бинормали. Ориентация этих векторов обычно выбирается следующим образом: вектор τ сонаправлен с вектором \mathbf{r}' , конец вектора \mathbf{n} лежит в той полуплоскости соприкасающейся плоскости (с границей по касательной), куда указывает вектор \mathbf{r}'' . Вектор \mathbf{b} выбирается так, чтобы тройка τ , \mathbf{n} , \mathbf{b} была правой.

Впрочем, в зависимости от рассматриваемого вопроса возможны и другие ориентации векторов τ , \mathbf{n} , \mathbf{b} .

Задача. Составить уравнения касательной, главной нормали и бинормали кривой, а также нормальной и спрямляющей плоскостей.

§ 5. КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ

1°. Кривизна кривой

Определение. Кривизной k_1 кривой L в точке M_0 называется предел отношения $\Theta/\Delta s$ при $M \rightarrow M_0$, где Θ — наименьший из углов между касательными к кривой L в точках M_0 и M , а Δs — длина дуги M_0M (рис. 19).

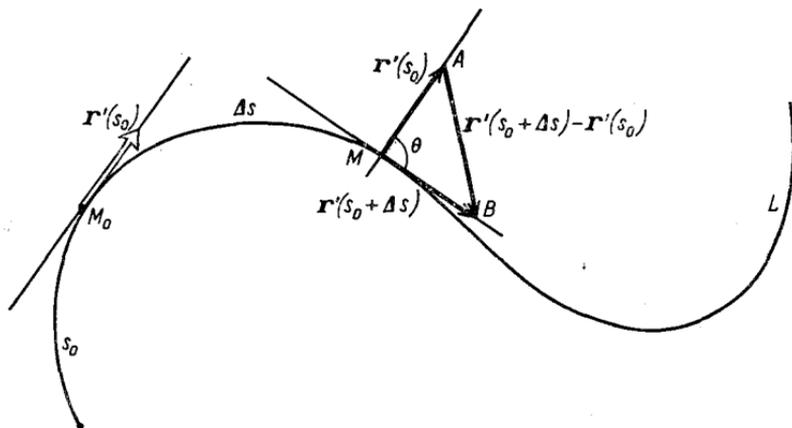


Рис. 19. Длины сторон MA и MB треугольника ABM равны единице, длина основания AB равна $2 \sin \frac{\Theta}{2}$

Иногда k_1 называют *первой кривизной* кривой.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathbf{r}(t)$ — вектор кривой L и M_0 — точка кривой L , отвечающая значению t_0 параметра. Тогда если $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ и существует $\mathbf{r}''(t_0)$, то кривая L имеет в точке M_0 кривизну $k_1(t_0)$. Если параметр — длина дуги s , то

$$k_1(s_0) = |\mathbf{r}''(s_0)|. \quad (1)$$

Для произвольной параметризации

$$k_1(t_0) = \frac{|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)|}{|\mathbf{r}'(t_0)|^3}. \quad (2)$$

* Пусть параметр — длина дуги s . Тогда $|\mathbf{r}'(s)| \equiv 1$ (см. замечание пункта 2° § 3). Поэтому

$$|\mathbf{r}'(s_0 + \Delta s) - \mathbf{r}'(s_0)| = 2 \sin \frac{\Theta}{2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{|\mathbf{r}'(s_0 + \Delta s) - \mathbf{r}'(s_0)|}{\Delta s} = \frac{\sin \frac{\Theta}{2}}{\frac{\Theta}{2}} \cdot \frac{\Theta}{\Delta s}.$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $M \rightarrow M_0$. Так как и $\Delta s \rightarrow 0$ и $\Theta \rightarrow 0$, то предел левой части существует и равен $|\mathbf{r}''(s_0)|$. Значит, существует и предел правой части $k_1(s_0)$.

Таким образом, кривая L имеет в точке M_0 кривизну, и формула (1) обоснована.

Вспоминая, что

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\mathbf{r}'^2(t)}$$

(см. формулу (6) пункта 2° § 3), для произвольной параметризации имеем

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \sqrt{\mathbf{r}'^2}.$$

Дифференцируя \mathbf{r}' еще раз по t , получим, что

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \cdot \mathbf{r}'^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')}{\sqrt{\mathbf{r}'^2}}.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат.

Учитывая ортогональность векторов $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ и равенства

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2 = k_1^2, \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)^2 = 1,$$

приходим к соотношению

$$\mathbf{r}''^2 = k_1^2 (\mathbf{r}'^2)^2 + \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')^2}{\mathbf{r}'^2},$$

откуда

$$k_1^2 = \frac{\mathbf{r}''^2 \cdot \mathbf{r}'^2 - (\mathbf{r}', \mathbf{r}'')^2}{(\mathbf{r}'^2)^3} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}{|\mathbf{r}'|^6}.$$

После извлечения квадратного корня получаем формулу (2). *

З а м е ч а н и е 1. Если векторы \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' неколлинеарны, то, как видно из формул (1) и (2), $k_1 \neq 0$. И наоборот, если $k_1 \neq 0$, то векторы \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' неколлинеарны.

Кривизна плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, вычисляется по формуле

$$k_1 = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Кривизна графика функции $y=f(x)$ может быть найдена по формуле

$$k_1 = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}}.$$

З а м е ч а н и е 2. Иногда кривизне плоской кривой приписывают знак. Обычно его связывают с направлением вращения касательной к кривой по отношению к оси Ox : если это вращение против часовой стрелки, то $k_1 > 0$, если по часовой стрелке, то $k_1 < 0$. При таком подходе знак кривизны кривой — графика функции $y=f(x)$ — совпадает со знаком второй производной f'' . Поэтому

$$k_1 = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}.$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что кривизна прямой равна нулю, а кривизна окружности радиуса R равна $1/R$.

Верно и обратное: если кривизна кривой равна нулю, то эта кривая есть связное множество на прямой, а если кривизна плоской кривой равна положительной постоянной a , то эта кривая — дуга окружности радиуса $1/a$.

2°. Кручение кривой

Рассмотрим кривую L и ее точки $M_0(s_0)$ и $M(s_0 + \Delta s)$. Пусть Θ — угол между соприкасающимися плоскостями π_0 и π кривой L в точках M_0 и M соответственно (рис. 20). Легко видеть, что угол между бинормальными $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0(s_0)$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s_0 + \Delta s)$ в точках M_0 и M также равен Θ .

Мы будем рассматривать предел

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\Theta}{\Delta s}.$$

Ясно, что вращение бинормали при увеличении параметра s может быть направлено как в сторону вектора главной нормали (если векторы $\mathbf{b}'(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ сонаправлены), так и в противоположную сторону (если векторы $\mathbf{b}'(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ противоположно направлены); ниже мы докажем, что векторы $\mathbf{b}'(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ коллинеарны.

Поэтому величине

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\theta}{\Delta s}$$

естественно приписывать знак.

Правило выбора знаков зависит от соглашения. Мы примем следующее *правило выбора знаков*: если векторы $\mathbf{b}'(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ сонаправлены, то будем считать этот предел отрицательным, если же векторы $\mathbf{b}'(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ противоположно направлены, — положительным.

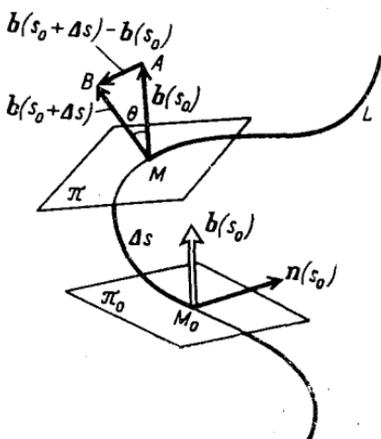


Рис. 20. Треугольник ABM — равнобедренный: длины сторон AM и BM равны единице, длина стороны AB равна $2 \sin \frac{\theta}{2}$

Определение. *Кручением* k_2 кривой L в точке M_0 называется

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\theta}{\Delta s},$$

снабженный знаком согласно правилу выбора знаков.

Иногда k_2 называют *второй кривизной* кривой.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathbf{r}(t)$ — вектор кривой L и M_0 — точка кривой L , отвечающая значению t_0 параметра. Тогда если векторы $\mathbf{r}'(t_0)$ и $\mathbf{r}''(t_0)$ неколлинеарны и существует вектор $\mathbf{r}'''(t_0)$, то кривая L в точке M_0 имеет кручение $k_2(t_0)$. Если параметр — длина дуги s , то

$$k_2(s_0) = \frac{(\mathbf{r}'(s_0), \mathbf{r}''(s_0), \mathbf{r}'''(s_0))}{r''^2(s_0)}. \quad (3)$$

Для произвольной параметризации

$$k_2(t_0) = \frac{(\mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0), \mathbf{r}'''(t_0))}{(\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0))^2}. \quad (4)$$

* Пусть параметр — длина дуги s . Так как векторы $\mathbf{r}'(s_0)$ и $\mathbf{r}''(s_0)$ неколлинеарны, то по непрерывности они неколлинеарны и в некоторой окрестности точки M_0 . Возьмем точку M кривой L из этой окрестности. Согласно теореме 4 в точках M_0 и M существуют соприкасающиеся плоскости кривой, а следовательно, и бинормали $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(s_0)$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s_0 + \Delta s)$. Имеем

$$\frac{|\mathbf{b}(s_0 + \Delta s) - \mathbf{b}(s_0)|}{\Delta s} = \frac{\sin \frac{\Theta}{2}}{\frac{\Theta}{2}} \cdot \frac{\Theta}{\Delta s}.$$

При $M \rightarrow M_0$ и $\Delta s \rightarrow 0$ и $\Theta \rightarrow 0$. Поэтому предел левой части последнего равенства существует и равен $|\mathbf{b}'(s_0)|$. Значит, существует предельное значение правой части. Нетрудно видеть, что оно равно $|k_2(s_0)|$.

Таким образом,

$$|\mathbf{b}'(s_0)| = |k_2(s_0)|. \quad (5)$$

Выше, при формулировке правила выбора знаков, мы пользовались коллинеарностью векторов $\mathbf{b}'(s_0)$ и $\mathbf{n}(s_0)$. Докажем, что векторы $\mathbf{b}'(s_0)$ и $\mathbf{n}(s_0)$ всегда коллинеарны. Для этого достаточно убедиться в том, что вектор $\mathbf{b}'(s_0)$ ортогонален векторам $\mathbf{b}(s_0)$ и $\boldsymbol{\tau}(s_0)$ (напомним, что $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}$).

Вектор $\mathbf{b}'(s_0)$ ортогонален вектору $\mathbf{b}(s_0)$, так как из равенства $\mathbf{b}^2 = 1$ вытекает, что $(\mathbf{b}', \mathbf{b}) = 0$.

Покажем, что вектор $\mathbf{b}'(s_0)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{\tau}(s_0)$. Так как вектор $\mathbf{r}'(s_0)$ — единичный и направлен по касательной, то $\mathbf{r}'(s_0) = \boldsymbol{\tau}(s_0)$. Вектор $\mathbf{r}''(s_0)$ ортогонален вектору $\mathbf{r}'(s_0)$ и лежит в соприкасающейся плоскости (см. замечание пункта 2° § 4). Тем самым, вектор $\boldsymbol{\tau}'(s_0) = \mathbf{r}''(s_0)$ коллинеарен (даже сонаправлен) вектору $\mathbf{n}(s_0)$, т. е. $\boldsymbol{\tau}'(s_0) \times \mathbf{n}(s_0) = \mathbf{0}$.

Дифференцируя равенство $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$, получим, что $\mathbf{b}' = \boldsymbol{\tau}' \times \mathbf{n}'$. Таким образом, вектор $\mathbf{b}'(s_0)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{\tau}(s_0)$.

Итак, векторы \mathbf{b}' и \mathbf{n} коллинеарны. Отсюда и из формулы (5) согласно правилу выбора знаков следует, что $\mathbf{b}' = -k_2 \mathbf{n}$ и, далее,

$$k_2 = -(\mathbf{b}', \mathbf{n}). \quad (6)$$

Подставляя в формулу (6) выражения для векторов \mathbf{n} и \mathbf{b}' :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{\sqrt{r''^2}},$$

$$\mathbf{b}' = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}' = \mathbf{r}' \times \left(\frac{\mathbf{r}''}{\sqrt{r''^2}} \right)' = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'''}{\sqrt{r''^2}} + \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \left(\frac{1}{\sqrt{r''^2}} \right)',$$

получим, что

$$k_2 = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{r''^2}.$$

Таким образом, кривая L в точке M_0 имеет кручение, и формула (3) обоснована.

Для произвольной параметризации имеем (дифференцирование по t отмечается штрихами):

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{r}'}{\sqrt{r'^2}}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\mathbf{r}''}{r'^2} + A\mathbf{r}',$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{\mathbf{r}'''}{[(\sqrt{r'^2})^3]} + B\mathbf{r}' + C\mathbf{r}'',$$

где A, B, C — некоторые скалярные величины. Подставляя полученные выражения для производных

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}$$

в числитель дроби формулы (3) и вспоминая, что

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2 = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2}{r'^6},$$

после несложных вычислений получим формулу (4). *

З а м е ч а н и е. Кручение кривой измеряет скорость отклонения этой кривой от ее соприкасающейся плоскости. Для плоской кривой $k_2 \equiv 0$. Верно и обратное: если кручение кривой всюду равно нулю, то кривая плоская.

3°. Формулы Френе *

ТЕОРЕМА 7. Пусть L — C^3 -регулярная кривая, s — длина дуги кривой L , $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s)$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$ — векторы основного триэдра, $k_1(s)$ и $k_2(s)$ — кривизна и кручение кривой L . Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= k_1\mathbf{n}, \\ \mathbf{n}' &= -k_1\boldsymbol{\tau} + k_2\mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= -k_2\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (7) называются *формулами Френе*.

* Так как $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}'(s)$, $\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{r}''(s)$ и вектор \mathbf{r}'' сонаправлен с вектором \mathbf{n} , причем $|\mathbf{r}''| = k_1$ (см. формулу (1)), то $\boldsymbol{\tau}' = k_1\mathbf{n}$. Первая формула Френе доказана.

Третья формула была получена нами в процессе доказательства теоремы 6.

Для обоснования второй формулы продифференцируем равенство $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}$. Имеем

$$\mathbf{n}' = \mathbf{b}' \times \boldsymbol{\tau} + \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}' = -k_2\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau} + k_1\mathbf{b} \times \mathbf{n} = -k_1\boldsymbol{\tau} + k_2\mathbf{b}. \quad *$$

* Френе (Frenet) Жан Фредерик (7.2.1816—12.6.1900) — французский математик.

4°. Вид кривой вблизи данной точки

Поместим начало координат в данную точку M_0 кривой L , так что $\mathbf{r}(s_0) = \mathbf{O}$. Тогда по формуле Тейлора с центром разложения в точке $s_0 = 0$ имеем

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}'(0)s + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(0)s^2 + \frac{1}{6}\mathbf{r}'''(0)s^3 + o(s^3). \quad (8)$$

Преобразуем правую часть этой формулы, используя векторы $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} , \mathbf{b} , взятые в точке $s_0 = 0$. Так как $\mathbf{r}'(0) = \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{r}''(0) = \boldsymbol{\tau}' = k_1\mathbf{n}$, $\mathbf{r}'''(0) = k_1'\mathbf{n} - k_1^2\boldsymbol{\tau} + k_1k_2\mathbf{b}$, то, подставляя эти выражения в формулу (8), получим

$$\mathbf{r}(s) = \left(s - \frac{k_1^3}{6}s^3\right)\boldsymbol{\tau} + \left(\frac{k_1}{2}s^2 + \frac{k_1'}{6}s^3\right)\mathbf{n} + \frac{k_1k_2}{6}s^3\mathbf{b} + o(s^3). \quad (9)$$

При помощи последней формулы мы можем описать вид кривой L вблизи данной точки M_0 (рис. 21).

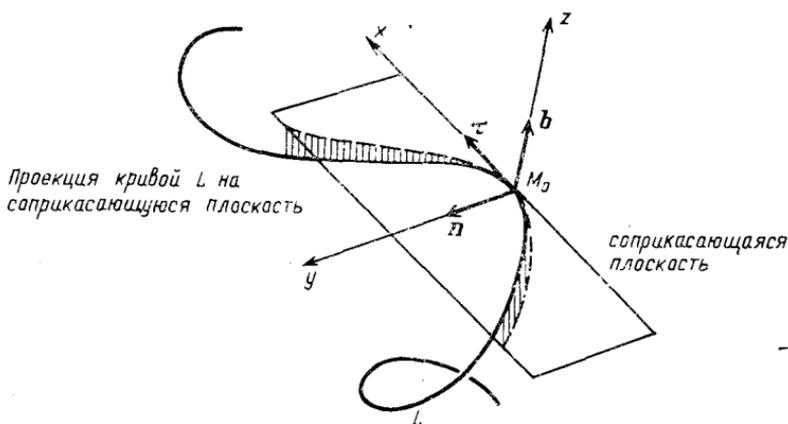


Рис. 21. Точка M_0 — начало координат, ось Ox направлена по касательной, ось Oy — по главной нормали, ось Oz — по бинормали

Выберем систему координат $Oxyz$ так, чтобы векторы $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} , \mathbf{b} были ортами координатных осей Ox , Oy , Oz соответственно. Сохраняя лишь главные члены разложения (9), получим параметрические уравнения кривой L , близкой к заданной кривой L , в окрестности точки M_0 :

$$x = s, \quad y = \frac{k_1}{2}s^2, \quad z = \frac{k_1k_2}{6}s^3, \quad -\varepsilon < s < \varepsilon. \quad (10)$$

Будем проектировать кривую L на координатные плоскости. Из формул (10) следует, что проекция кривой L на соприкасающуюся плоскость Oxy в окрестности точки M_0 близка к параболе

$x=s, y=\frac{k_1}{2} s^2 - y = \frac{k_1}{2} x^2$ (рис. 22); проекция кривой \tilde{L} на нормальную плоскость Oxz близка к полукубической параболе $y = \frac{k_1}{2} s^2, z = \frac{R_1 k_2}{6} s^3 - z^2 = \alpha y^3$ (рис. 23); проекция кривой \tilde{L} на спрямляющую плоскость Oxz близка к кубической параболе $x = s, z = \frac{k_1 k_2}{6} s^3 - z = \frac{k_1 k_2}{6} x^3$ (рис. 24).

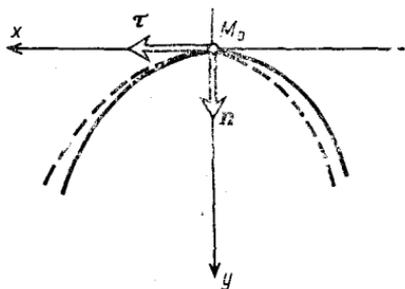


Рис. 22. Проекция кривой на соприкасающуюся плоскость близка к параболе

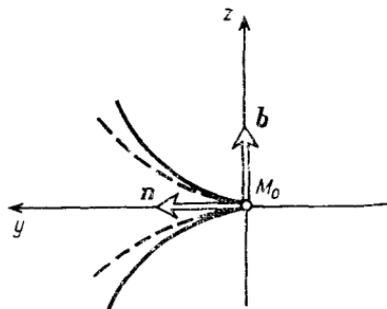


Рис. 23. Проекция кривой на нормальную плоскость близка к полукубической параболе

5°. Натуральные уравнения кривой

Кривизна $k_1(s)$ и кручение $k_2(s)$ описывают кривую в определенном смысле единственным образом.

ТЕОРЕМА 8. Пусть функции $k_1(s) > 0$ и $k_2(s)$ имеют на сегменте $[0, S]$ непрерывные производные. Тогда существует единственная с точностью до положения в пространстве C^3 -регулярная кривая, кривизна и кручение которой в точке, отвечающей длине дуги $s \in [0, S]$, равны соответственно $k_1(s)$ и $k_2(s)$.

* Будем рассматривать формулы Френе

$$\begin{aligned} \tau' &= -k_1 n, \\ n' &= k_1 \tau + k_2 b, \\ b' &= -k_2 n \end{aligned} \quad (7)$$

как систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\tau(s), n(s), b(s)$.

В качестве начальных данных для системы (7) выберем единичные попарно ортогональные векторы τ_0, n_0, b_0 , образующие правую тройку:

$$\begin{aligned} (\tau_0, n_0, b_0) &= 1, \quad \tau_0^2 = 1, \quad n_0^2 = 1, \quad b_0^2 = 1, \quad (\tau_0, n_0) = 0, \\ (\tau_0, b_0) &= 0, \quad (n_0, b_0) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

При сформулированных условиях согласно теореме существования и единственности решения задачи Коши* для системы обыкновенных дифференциальных уравнений существует единственное решение $\tau(s)$, $n(s)$, $b(s)$ системы (7) класса C^1 на сегменте $[0, S]$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\tau(0) = \tau_0, \quad n(0) = n_0, \quad b(0) = b_0.$$

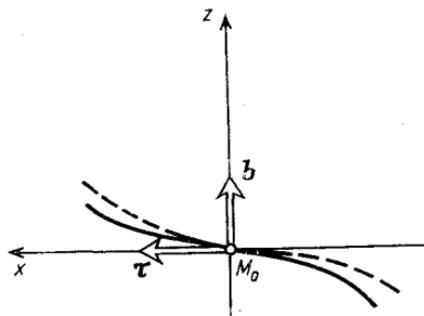


Рис. 24. Проекция кривой на спрямляющую плоскость близка к кубической параболе

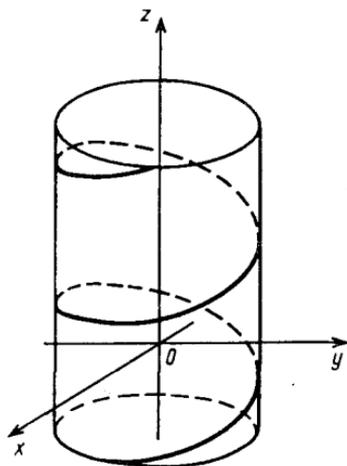


Рис. 25. Винтовая линия

Докажем, что для любого $s \in [0, S]$ векторы $\tau(s)$, $n(s)$, $b(s)$ являются единичными, попарно ортогональными и образуют правую тройку.

Составим систему шести линейных дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных скалярных функций τ^2 , n^2 , b^2 , (τ, n) , (τ, b) , (n, b) следующим образом.

Умножим первое из уравнений (7) на вектор 2τ . Получим $2(\tau, \tau') = 2k_1(\tau, n)$ или $(\tau^2)' = 2k_1(\tau, n)$. Это и есть первое из интересующих нас уравнений. Аналогично строятся уравнения

$$(n^2)' = -2k_1(\tau, n) + 2k_2(n, b) \quad \text{и} \quad (b^2)' = -2k_2(n, b).$$

Чтобы построить четвертое уравнение, умножим первое из уравнений (7) скалярно на вектор n , второе — на вектор τ и сложим полученные результаты:

$$(\tau, n)' = -\frac{1}{2} k_1(\tau^2) + \frac{1}{2} k_1(n^2) + k_2(\tau, b).$$

* Коши (Cauchy) Огюстен Луи (21.8.1789—23.5.1857) — французский математик, член Петербургской АН (с 1831 года).

Аналогично строятся оставшиеся два уравнения

$$(\tau, \mathbf{b})' = -k_2(\tau, \mathbf{n}) + k_1(\mathbf{n}, \mathbf{b}) \text{ и } (\mathbf{n}, \mathbf{b})' = -\frac{1}{2}k_2(\mathbf{n}^2) + \\ + \frac{1}{2}k_2(\mathbf{b}^2) - k_1(\tau, \mathbf{b}).$$

Полученная система шести уравнений является следствием системы (7). Поэтому набор функций

$$\tau^2 = \tau^2(s), \quad \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}^2(s), \quad \mathbf{b}^2 = \mathbf{b}^2(s), \quad (\tau, \mathbf{n}) = (\tau(s), \mathbf{n}(s)), \quad (\tau, \mathbf{b}) = \\ = (\tau(s), \mathbf{b}(s)), \quad (\mathbf{n}, \mathbf{b}) = (\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$$

является ее решением и, кроме того, удовлетворяет условиям (11). Этой же системе и начальным условиям (11) удовлетворяет набор

$$\tau^2 = 1, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{b}^2 = 1, \quad (\tau, \mathbf{n}) = 0, \quad (\tau, \mathbf{b}) = 0, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{b}) = 0.$$

Вследствие того что начальные условия однозначно определяют решение системы, получаем

$$\tau^2(s) = 1, \quad \mathbf{n}^2(s) = 1, \quad \mathbf{b}^2(s) = 1, \quad (\tau(s), \mathbf{n}(s)) = 0, \quad (\tau(s), \mathbf{b}(s)) = 0, \\ (\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) = 0.$$

Это означает, что векторы $\tau(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ единичные и попарно ортогональные. Поэтому их смешанное произведение равно

$$(\tau(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) = \pm 1.$$

Поскольку это произведение непрерывно и равно $+1$ при $s=0$, то оно равно $+1$ при любом $s \in [0, S]$. Тем самым векторы $\tau(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ образуют правую тройку.

Рассмотрим кривую L с радиус-вектором

$$\mathbf{r}(s) = \int_0^s \tau(\sigma) d\sigma.$$

Так как $|\mathbf{r}'(s)| = |\tau(s)| = 1$, то s — длина дуги кривой L .

Найдем кривизну и кручение этой кривой. Используя первое из соотношений (7), по формуле (1) для кривизны имеем

$$|\mathbf{r}''(s)| = |\tau'(s)| = k_1(s).$$

Кручение вычислим по формуле (3), используя соотношения (7) и только что полученную формулу

$$\frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{r''^2} = \frac{(\tau, k_1 \mathbf{n}, k_1' \mathbf{n} + k_1 \mathbf{n}')}{k_1^2} = \\ = \frac{(\tau, k_1 \mathbf{n}, k_1' \mathbf{n} + k_1 k_2 \mathbf{b})}{k_1^2} = \frac{k_1' k_2 (\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b})}{k_1^2} = k_2.$$

Итак, кривизна и кручение кривой L в точке, отвечающей ее длине дуги s , равны соответственно $k_1(s)$ и $k_2(s)$.

Докажем теперь, что если кривизна и кручение некоторой другой кривой \tilde{L} равны $k_1(s)$ и $k_2(s)$, то она отличается от кривой L только положением в пространстве.

Переместим кривую \tilde{L} в пространстве так, чтобы ее векторы $\tilde{\tau}$, \tilde{n} , \tilde{b} при $s=0$ совпали с векторами τ_0 , n_0 , b_0 кривой L . Убедимся, что перемещенная кривая L^* и кривая \tilde{L} совпадают.

Векторы $\tau^*(s)$, $n^*(s)$, $b^*(s)$ кривой L^* являются решениями системы (7) (для кривой L^* это формулы Френе) с начальными данными τ_0 , n_0 , b_0 . По теореме единственности имеем

$$\tau^*(s) = \tau(s), \quad n^*(s) = n(s), \quad b^*(s) = b(s).$$

Поэтому $\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}'(s) (\mathbf{r}^*(s) = \tau^*(s) = \tau(s) = \mathbf{r}'(s))$, а так как $\mathbf{r}^*(0) = \mathbf{r}(0)$, то $\mathbf{r}^*(s) \equiv \mathbf{r}(s)$. *

З а м е ч а н и е 1. Функции $k_1(s)$ и $k_2(s)$ могут быть заданы и на другом множестве, например на полупрямой $[0, \infty)$ или на прямой $(-\infty, \infty)$.

З а м е ч а н и е 2. Систему соотношений

$$k_1 = k_1(s), \quad k_2 = k_2(s)$$

называют *натуральными уравнениями кривой*. Согласно доказанной теореме кривая определяется натуральными уравнениями однозначно с точностью до положения в пространстве.

П р и м е р. Найти кривизну и кручение *винтовой линии*

$$\mathbf{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, bt\} \quad (\text{рис. 25}).$$

* Так как $\mathbf{r}'^2 = a^2 + b^2$, $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2 = a^2(a^2 + b^2)$, $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = a^2b$, то

$$k_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad k_2 = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

т. е. кривизна и кручение у винтовой линии постоянны.

Этим свойством обладают только винтовые линии. *

§ 6. СОПРИКОСНОВЕНИЕ КРИВЫХ

1°. Понятие порядка соприкосновения

Рассмотрим кривые L_1 и L_2 , проходящие через общую точку M_0 , гладкие в этой точке и имеющие в ней общую касательную M_0T . Возьмем на прямой M_0T точку P , близкую к точке M_0 , и проведем через точку P плоскость π , перпендикулярную M_0T . Эта плоскость пересечет кривые L_1 и L_2 в точках M_1 и M_2 соответственно (мы ограничиваем наши рассуждения теми окрестностями точки M_0 на кривых L_1 и L_2 , которые однозначно проектируются на касательную M_0T). Обозначим через l длину отрезка M_0P , а через h — длину отрезка M_1M_2 (рис. 26).

Определение. Будем говорить, что *порядок соприкосновения* кривых L_1 и L_2 в точке M_0 не ниже $q \in \mathbb{N}$, если

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^q} = 0. \quad (1)$$

Если, кроме того,

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^{q+1}} \neq 0 \quad (2)$$

или отношение $\frac{h}{l^{q+1}}$ не имеет предела при $l \rightarrow 0$, то будем говорить, что *порядок соприкосновения* кривых L_1 и L_2 в точке M_0 равен q .

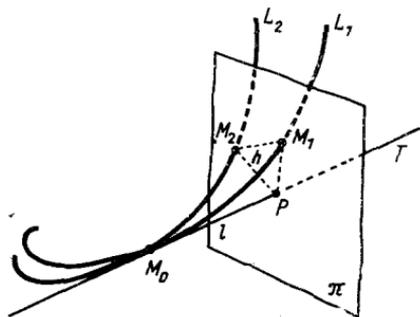


Рис. 26. Кривые L_1 и L_2 касаются одна другой в точке M_0

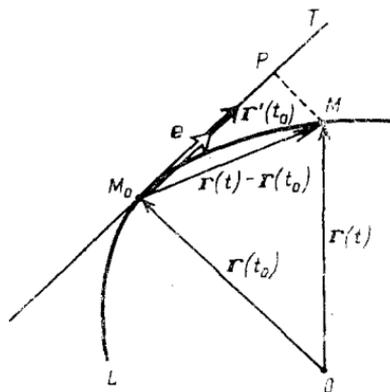


Рис. 27. Единичный вектор e и вектор $r'(t_0)$ сонаправлены, точка P — ортогональная проекция точки M

Если равенство (1) имеет место для любого $q \in \mathbb{N}$, то кривые L_1 и L_2 имеют по определению в точке M_0 *бесконечный порядок соприкосновения*.

Пример 1. Пусть L_1 и L_2 — графики функций $y=x^2$ и $y=-3x^2$ соответственно. Кривые L_1 и L_2 имеют общую точку касания $x=0$, $y=0$. Легко видеть, что в этом случае $l=|x|$, $h=2x^2$. Поэтому

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{|x|} = 0, \quad \lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, порядок соприкосновения кривых L_1 и L_2 в точке $(0, 0)$ равен 1. *

Пример 2. Пусть L_1 — ось Ox , а кривая L_2 задана параметрическими уравнениями $x=t$, $y=|t|^{37,2}$, $z=t^{90}$. Найдем порядок соприкосновения кривых L_1 и L_2 в начале координат.

* Имеем $l = |t|$, $h = \sqrt{t^{74,2} + t^{180}} = |t|^{37,2} \sqrt{1 + |t|^{105,8}}$. Поэтому

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^{37}} = \lim_{>t \rightarrow 0} |t|^{0,2} \sqrt{1 + |t|^{105,8}} = 0.$$

Так как предел отношения $\frac{h}{l^{37+1}}$ не существует (он равен бесконечности), то порядок соприкосновения кривых L_1 и L_2 в точке $(0, 0)$ равен 37. *

Пример 3. Пусть L_1 — ось Ox , а L_2 — график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Покажем, что кривые L_1 и L_2 имеют в начале координат бесконечный порядок соприкосновения.

* В рассматриваемом случае $l = |x|$, $h = e^{-\frac{1}{|x|}}$. Так как для любого $q \in \mathbb{N}$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^q} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{|x|^q} = 0,$$

то наше утверждение справедливо. *

2°. Достаточные условия соприкосновения

Пусть L — кривая класса C^n в окрестности точки M_0 , $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — вектор кривой L , $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ (точка M_0 отвечает значению t_0 параметра).

Выберем координатную систему так, чтобы точка M_0 стала началом координат, ось абсцисс совпадала с касательной M_0T к кривой L в точке M_0 , а ее направление — с направлением вектора $\mathbf{r}'(t_0)$. Обозначим через l абсциссу точки P на этой оси, близкой к точке M_0 (мы ограничим наши рассуждения той окрестностью точки M_0 на кривой L , в которой $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ и которая однозначно проектируется на касательную M_0T) (рис. 27).

ЛЕММА. В некоторой окрестности точки M_0 на кривой L абсцисса l точки P — проекции точки $M(t) \in L$ на ось M_0T — может быть принята за параметр кривой L ; при этом L будет кривой класса C^n .

* Пусть \mathbf{e} — единичный орт оси M_0T , сонаправленный вектору $\mathbf{r}'(t_0)$. Ясно, что

$$l(t) = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{e}).$$

$$\frac{dl}{dt} = (\mathbf{r}'(t), \mathbf{e}) \neq 0$$

в некоторой окрестности точки M_0 . Следовательно, в этой окрестности $l=l(t)$ — строго монотонная функция, имеющая обратную $t=t(l)$. Поэтому абсцисса l может быть принята за параметр на кривой l . Из явного вида функции $l(t)$ следует, что это функция того же класса гладкости, что и $\mathbf{r}(t)$. Поэтому и скалярная функция $t=t(l)$ принадлежит классу C^n .

Таким образом, выбирая l за параметр на кривой L , получаем, что векторная функция $\mathbf{r}(l)=\mathbf{r}(t(l))$ принадлежит тому же классу гладкости, что и векторная функция $\mathbf{r}(t)$. *

Обратимся теперь к регулярным кривым L_1 и L_2 , соприкасающимся в точке M_0 . Выберем за параметр на кривых L_1 и L_2 абсциссу l точки P — общей проекции на ось M_0T точек M_1 и M_2 рассматриваемых кривых (рис. 28).

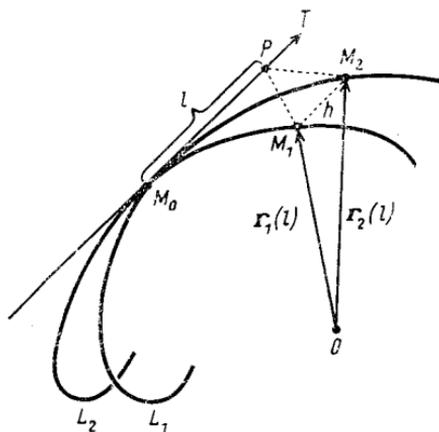


Рис. 28. Кривые L_1 и L_2 имеют в точке M_0 общую касательную M_0T

Пусть $\mathbf{r}_1(l)$ и $\mathbf{r}_2(l)$ — векторы кривых L_1 и L_2 , а точка M_0 отвечает значению $l=0$, т. е. $\mathbf{r}_1(0)=\mathbf{r}_2(0)$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\mathbf{r}_1(l)$ и $\mathbf{r}_2(l)$ — векторные функции класса C^n в окрестности начальной точки $l=0$. Если

$$\mathbf{r}'_1(0)=\mathbf{r}'_2(0), \dots, \mathbf{r}^{(q)}_1(0)=\mathbf{r}^{(q)}_2(0), \quad (3)$$

то кривые L_1 и L_2 имеют в точке M_0 порядок соприкосновения не ниже q . Если, кроме того, $\mathbf{r}^{(q+1)}_1(0) \neq \mathbf{r}^{(q+1)}_2(0)$, то порядок соприкосновения кривых L_1 и L_2 равен q .

* Докажем сначала первую часть теоремы. Для этого исследуем предел

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^q}.$$

В данном случае h — длина отрезка M_1M_2 , равная $|\mathbf{r}_2(l) - \mathbf{r}_1(l)|$. По формуле Тейлора для разности $\mathbf{r}_2(l) - \mathbf{r}_1(l)$ с центром разложения $l=0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2(l) - \mathbf{r}_1(l) &= \{\mathbf{r}_2(0) - \mathbf{r}_1(0)\} + \{\mathbf{r}'_2(0) - \mathbf{r}'_1(0)\}l + \dots \\ &\dots + \frac{1}{q!} \{\mathbf{r}_2^{(q)}(0) - \mathbf{r}_1^{(q)}(0)\}l^q + o(l^q). \end{aligned}$$

Первая разность в фигурных скобках равна нулю, поскольку M_0 — общая точка кривых L_1 и L_2 — отвечает значению $l=0$. По условию теоремы (см. (3)) равны нулю и остальные выражения в фигурных скобках. Поэтому

$$h = |\mathbf{r}_2(l) - \mathbf{r}_1(l)| = o(l^q).$$

Обращаясь к интересующему нас пределу (1), получаем, что

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^q} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{o(l^q)}{l^q} = 0.$$

Таким образом, при выполнении условий (3) порядок соприкосновения кривых L_1 и L_2 в точке M_0 не ниже q .

Перейдем к доказательству второй части теоремы, где наряду с соотношениями (3) выполняется неравенство $\mathbf{r}_1^{(q+1)}(0) \neq \mathbf{r}_2^{(q+1)}(0)$.

Вновь обращаясь к формуле Тейлора, получаем

$$\mathbf{r}_2(l) - \mathbf{r}_1(l) = \frac{1}{(q+1)!} \{\mathbf{r}_2^{(q+1)}(0) - \mathbf{r}_1^{(q+1)}(0)\}l^{q+1} + o(l^{q+1}).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^q} = 0 \text{ и } \lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^{q+1}} \neq 0.$$

Это означает, что порядок соприкосновения кривых L_1 и L_2 в точке M_0 равен q . *

З а м е ч а н и е. Если $\mathbf{r}_1(l)$ и $\mathbf{r}_2(l)$ — векторные функции класса C^∞ в окрестности $l=0$, и для любого $q \in \mathbf{N}$ выполняется равенство

$$\mathbf{r}_1^{(q)}(0) = \mathbf{r}_2^{(q)}(0), \quad \mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_2(0),$$

то кривые L_1 и L_2 имеют в точке M_0 бесконечный порядок соприкосновения.

* Действительно, в этом случае

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^q} = 0$$

для любого q . *

3°. Соприкасающаяся окружность

Пусть L — регулярная в окрестности точки M_0 кривая. Рассмотрим всевозможные окружности, касающиеся кривой L в точке M_0 . Та из этих окружностей, порядок соприкосновения которой с кривой L не ниже двух, называется *соприкасающейся окружностью* (рис. 29).

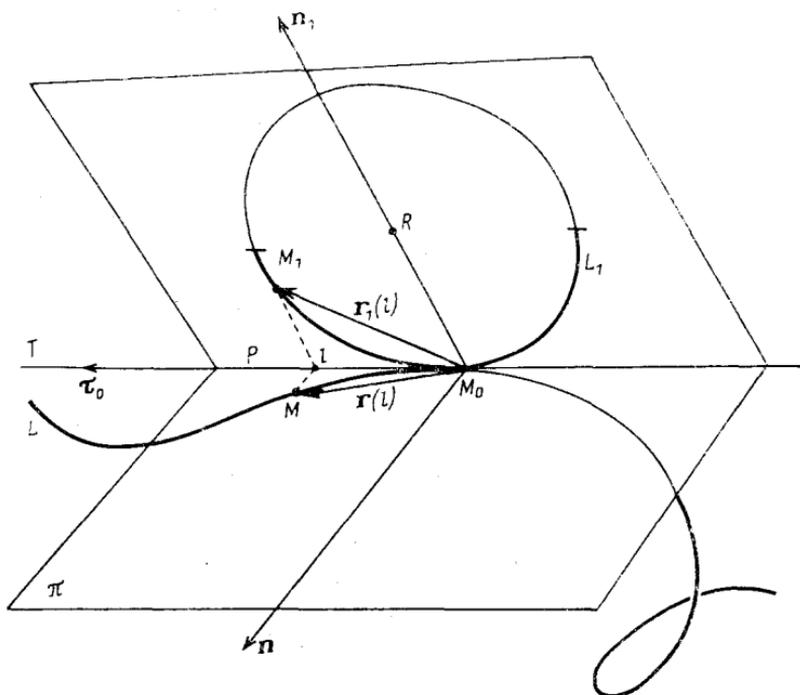


Рис. 29. Прямая M_0T — общая касательная кривой L и окружности L_1 в точке M_0

ТЕОРЕМА 10. Если кривизна k_1 регулярной кривой L в точке M_0 отлична от нуля, то в этой точке существует соприкасающаяся окружность кривой L ; эта окружность расположена в соприкасающейся плоскости кривой L и ее радиус R равен $\frac{1}{k_1(M_0)}$.

* Пусть L_1 — окружность радиуса R , касающаяся кривой L в точке M_0 . Так как кривизна $k_1(M_0)$ кривой L в точке M_0 отлич-

на от нуля, то у L в этой точке существует соприкасающаяся плоскость π .

Введем единичные векторы: общей касательной кривых L и L_1 в точке $M_0 - \tau_0$ и главных нормалей \mathbf{n} и \mathbf{n}_1 соответственно. За параметр на кривых L и L_1 возьмем абсциссу l точки P — общей проекции точек M и M_1 рассматриваемых кривых на касательную M_0T . Векторы кривых L и L_1 , отложенные от точки M_0 , обозначим соответственно через $\mathbf{r}(l)$ и $\mathbf{r}_1(l)$.

Подсчитаем производные $\mathbf{r}'(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ и $\mathbf{r}'_1(0)$, $\mathbf{r}''_1(0)$. Вычисление производных $\mathbf{r}'_1(0)$ и $\mathbf{r}''_1(0)$ не представляет затруднений, так как для полуокружности, касающейся кривой L в точке M_0 , — части кривой L_1 вектор $\mathbf{r}_1(l)$ имеет вид

$$\mathbf{r}_1(l) = l\tau_0 + (R - \sqrt{R^2 + l^2})\mathbf{n}_1.$$

Поэтому

$$\mathbf{r}'_1(0) = \tau_0, \quad \mathbf{r}''_1(0) = \frac{1}{R}\mathbf{n}_1. \quad (4)$$

Для упрощения вычислений производных $\mathbf{r}'(0)$ и $\mathbf{r}''(0)$ выберем сначала за параметр на кривой L длину дуги s , отсчитываемую от точки M_0 и возрастающую в направлении, определяемом вектором τ_0 . Тогда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ и

$$l(s) = (\mathbf{r}(s), \tau_0). \quad (5)$$

Воспользуемся следующими формулами:

$$\mathbf{r}'(l) = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dl}, \quad \mathbf{r}''(l) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dl} \right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dl^2}.$$

Так как при $l=0$ длина дуги $s=0$, то отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(0) &= \left. \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|_{s=0} \cdot \left. \frac{ds}{dl} \right|_{l=0}, \\ \mathbf{r}''(0) &= \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|_{s=0} \cdot \left. \left(\frac{ds}{dl} \right)^2 \right|_{l=0} + \left. \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|_{s=0} \cdot \left. \frac{d^2s}{dl^2} \right|_{l=0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из того, что $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \tau$ и $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\tau}{ds} = k_1(M)\mathbf{n}$, при $s=0$ получаем, что

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|_{s=0} = \tau_0, \quad \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|_{s=0} = k_1(M_0)\mathbf{n} \quad (7)$$

(здесь $k_1(M_0)$ — кривизна кривой L в точке M_0). Остается вычислить

$$\left. \frac{ds}{dl} \right|_{l=0} \quad \text{и} \quad \left. \frac{d^2s}{dl^2} \right|_{l=0}.$$

Из формулы (5) имеем

$$\frac{dl}{ds} = \left(\frac{dr}{ds}, \tau_0 \right),$$

откуда

$$\frac{ds}{dl} = \frac{1}{\left(\frac{dr}{ds}, \tau_0 \right)}. \quad (8)$$

Дифференцируя равенство (8), получим, что

$$\frac{d^2s}{dl^2} = \frac{\left(\frac{d^2r}{ds^2}, \tau_0 \right)}{\left(\frac{dr}{ds}, \tau_0 \right)^2}. \quad (9)$$

Положим в формулах (8) и (9) $l=0$ ($s=0$). Согласно равенствам (7) находим, что

$$\frac{ds}{dl} \Big|_{l=0} = 1, \quad \frac{d^2s}{dl^2} \Big|_{l=0} = 0.$$

Подставляя все найденные значения в правые части соотношений (6), получаем нужные нам выражения для $\mathbf{r}'(0)$ и $\mathbf{r}''(0)$:

$$\mathbf{r}'(0) = \tau_0, \quad \mathbf{r}''(0) = k_1(M_0)\mathbf{n}. \quad (10)$$

Для того чтобы окружность L_1 была соприкасающейся для кривой L в точке M_0 , согласно теореме 9 достаточно выполнения соотношений

$$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}'_1(0), \quad \mathbf{r}''(0) = \mathbf{r}''_1(0).$$

Первое из этих соотношений выполняется вследствие того, что оба входящих в него вектора равны (см. формулы (4) и (10)).

Второе выполняется в случае, если $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ и

$$R = \frac{1}{k_1(M_0)} \quad (\text{напомним, что } k_1(M_0) \neq 0).$$

Итак, соприкасающаяся окружность в точке M_0 кривой L существует; вследствие равенства $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ она расположена в соприкасающейся плоскости кривой L , и ее радиус R равен $\frac{1}{k_1(M_0)}$. *

З а м е ч а н и е 1. Если кривизна $k_1(M_0) = 0$, то согласно второй из формул (10) $\mathbf{r}''(0) = \mathbf{0}$. Обращение в нуль производной $\mathbf{r}''_1(0)$ возможно лишь в случае, когда окружность L_1 «вырождается» в касательную M_0T . Значит, если кривизна кривой L в точке M_0 равна нулю, то соприкасающаяся окружность в точке M_0 кривой L «вырождается» в прямую линию.

З а м е ч а н и е 2. Пусть L — C^2 -регулярная кривая и ее кривизна k_1 отлична от нуля. Тогда если $\mathbf{r}(t)$ — вектор кривой L , то центр соприкасающейся окружности в точке M кривой, отвечающей данному значению параметра t , определяется вектором

$$\mathbf{r}_{ц} = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{k_1(M)} \mathbf{n}, \quad (11)$$

где \mathbf{n} — вектор главной нормали кривой L в точке M .

Центр и радиус соприкасающейся окружности называются *центром* и *радиусом кривизны* кривой.

Радиус R кривизны кривой определяется формулой

$$R = \frac{1}{k_1}.$$

4°. Эволюта и эвольвента плоской кривой

Пусть L — C^2 -регулярная плоская кривая, кривизна $k_1(M)$ которой отлична от нуля в каждой точке M .

О п р е д е л е н и е. Эволютой кривой L называется множество ее центров кривизны. Сама кривая L по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой* (рис. 30).

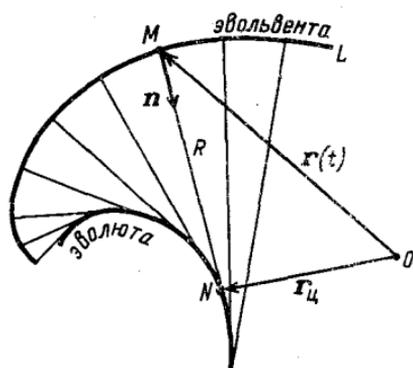


Рис. 30. Эволюта — множество центров кривизны N кривой L (эвольвенты). Радиус R кривизны кривой L равен $\frac{1}{k_1(M)}$

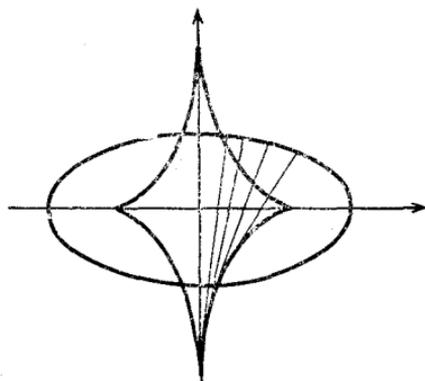


Рис. 31. Эволюта эллипса

Если $\mathbf{r}(t)$ — вектор кривой L , k_1 — кривизна кривой L , то согласно формуле (11) ее эволюта определяется формулой

$$\mathbf{r}_{ц} = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{k_1(M)} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — вектор главной нормали кривой L .

П р и м е р. Найти эволюту эллипса.

* Пусть $\mathbf{r}(t) = \{a \cos t, b \sin t\}$, $0 \leq t < 2\pi$ — вектор эллипса, $a > b$.

После несложных вычислений получим (рис. 31)

$$\mathbf{r}_{\text{ц}}(t) = \left\{ \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right\}.$$

Таким образом, эволюта эллипса представляет собой *удлиненную астроиду*. *

СВОДКА ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ, ФОРМУЛ, ФАКТОВ

А. Простой кривой называется множество L точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты x, y, z которых определяются соотношениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (*)$$

если функции $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ и разным значениям параметра t из отрезка $[\alpha, \beta]$ отвечают разные точки множества L . Соотношения $(*)$ называются *параметрическими уравнениями* кривой L .

Б. Множество L точек $M(x, y, z)$, координаты x, y, z которых определяются соотношениями $(*)$, называется *простой замкнутой кривой*, если функции $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$,

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta), \quad \psi(\alpha) = \psi(\beta), \quad \chi(\alpha) = \chi(\beta)$$

и разным значениям параметра t из полуинтервала $[\alpha, \beta)$ отвечают разные точки множества L .

В. *Вектором кривой L* называется векторная функция

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t) \mathbf{i} + \psi(t) \mathbf{j} + \chi(t) \mathbf{k}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Г. *Касательной к кривой L* в точке M_0 называется прямая M_0T , меньший из углов которой с переменной прямой M_0M (M — точка кривой L) стремится к нулю при $M \rightarrow M_0$. *Уравнение касательной к кривой L , заданной вектором $\mathbf{r}(t)$, в точке M_0 , отвечающей значению параметра t_0 :*

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t_0) + \lambda \mathbf{r}'(t_0),$$

\mathbf{R} — вектор произвольной точки касательной.

Д. Кривая L называется *гладкой в точке M_0* , если в этой точке существует касательная к кривой L и некоторая окрестность точки M_0 на кривой L однозначно проектируется на эту касательную.

Кривая L называется *гладкой*, если она является гладкой в каждой своей точке и касательные в точках кривой L изменяются непрерывно.

Достаточные условия гладкости кривой: если на множестве изменения параметра t вектор $\mathbf{r}(t)$ кривой L имеет непрерывную

производную $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, то кривая L является гладкой кривой.

Е. Гладкая кривая L называется *регулярной кривой* (кривой класса C^n), если ее вектор $\mathbf{r}(t)$ имеет непрерывные производные всех порядков до $n \geq 2$ включительно.

Достаточные условия регулярности кривой: если на множестве изменения параметра t вектор $\mathbf{r}(t)$ кривой L имеет непрерывные производные всех порядков до $n \geq 2$ включительно и $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, то кривая L является регулярной кривой.

Ж. Простая кривая L называется *спрямляемой*, если множество длин всевозможных ломаных, правильно вписанных в кривую L , ограничено. Точная верхняя грань этих длин называется *длиной кривой* L .

Достаточные условия спрямляемости кривой: простая кривая L спрямляема, если ее вектор $\mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, всюду на отрезке $[\alpha, \beta]$ имеет непрерывную производную $\mathbf{r}'(t)$. Длина S спрямляемой кривой L вычисляется по формуле

$$S = S(L) = \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

З. Параметризация спрямляемой кривой называется *натуральной* (естественной), если в качестве параметра взята длина ее дуги.

И. Плоскость π , проходящая через точку M_0 , называется *пределом при $M \rightarrow M_0$ переменной плоскости π_M* (также проходящей через точку M_0), если меньший из углов между этими плоскостями стремится к нулю, когда $M \rightarrow M_0$.

Соприкасающейся плоскостью кривой L в точке M_0 называется предел, к которому стремится переменная плоскость π_M , проходящая через касательную M_0T к кривой L в точке M_0 и текущую точку M кривой L , при условии, что $M \rightarrow M_0$.

Достаточные условия существования соприкасающейся плоскости: регулярная кривая L , заданная вектором $\mathbf{r}(t)$, имеет в точке M_0 , отвечающей значению t_0 параметра, соприкасающуюся плоскость, если в точке t_0 векторы $\mathbf{r}'(t_0)$ и $\mathbf{r}''(t_0)$ неколлинеарны.

Уравнение соприкасающейся плоскости кривой L , заданной вектором $\mathbf{r}(t)$:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0)) = 0,$$

\mathbf{R} — вектор произвольной точки соприкасающейся плоскости.

К. *Нормалью* кривой L в точке M_0 называется любая прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной к кривой L в точке M_0 .

Главной нормалью кривой L в точке M_0 называется нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости кривой L в точке M_0 .

Бинормалью кривой L в точке M_0 называется нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости кривой L в точке M_0 .

Л. *Нормальной плоскостью* кривой L в точке M_0 называется плоскость, проходящая через главную нормаль и бинормаль кривой L в точке M_0 .

Спрямяющей плоскостью кривой L в точке M_0 называется плоскость, проходящая через касательную и бинормаль кривой L в точке M_0 .

М. *Кривизной* регулярной кривой L в точке M называется число k_1 , равное пределу отношения $\Theta/\Delta s$ при $M \rightarrow M_0$ (здесь Θ — меньший из углов между касательными кривой L в точках M_0 и M , а Δs — длина дуги $\widehat{M_0M}$).

Кривизна регулярной кривой L , заданной вектором $r(t)$, вычисляется по формуле

$$k_1(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3},$$

а в случае натуральной параметризации $r=r(s)$ —

$$k_1(s) = |r''(s)|.$$

Кривизна k_1 плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, вычисляется по формуле

$$k_1 = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}.$$

Кривизна k_1 графика функции $y=f(x)$ вычисляется по формуле

$$k_1 = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}.$$

Н. *Кручением (второй кривизной)* кривой L в точке M_0 называется число k_2 , равное пределу отношения $\Theta/\Delta s$ при $M \rightarrow M_0$ (здесь Θ — меньший из углов между соприкасающимися плоскостями кривой L в точках M_0 и M , Δs — длина дуги $\widehat{M_0M}$; угол Θ считается положительным, если наблюдатель, помещенный в точку M_0 , видит вращение переменной соприкасающейся плоскости при $M \rightarrow M_0$ против часовой стрелки, и отрицательным, если по часовой стрелке).

Кручение k_2 регулярной кривой L , заданной вектором $r(t)$, при условии, что векторы $r'(t)$ и $r''(t)$ неколлинеарны, вычисляется по формуле

$$k_2(t) = \frac{(r'(t), r''(t), r'''(t))}{(r'(t) \times r''(t))^2},$$

а в случае натуральной параметризации $r=r(s)$ —

$$k_2(s) = \frac{(r'(s), r''(s), r'''(s))}{(r''(s))^2}.$$

О. *Формулы Френе:*

$$\frac{d\tau}{ds} = k_1 \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k_1 \tau + k_2 \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -k_2 \mathbf{n}$$

(здесь τ — единичный вектор касательной, \mathbf{n} — единичный вектор главной нормали, \mathbf{b} — единичный вектор бинормали).

П. Если функции $k_1(s) > 0$ и $k_2(s)$ имеют на отрезке $[0, S]$ непрерывные производные, то существует единственная с точностью до положения в пространстве кривая класса C^3 , кривизна и кручение которой в произвольной точке, отвечающей длине дуги $s \in [0, S]$, равны $k_1(s)$ и $k_2(s)$ соответственно. Уравнения

$$k_1 = k_1(s), \quad k_2 = k_2(s), \quad 0 \leq s \leq S,$$

называются *натуральными уравнениями кривой*.

Р. *Порядок соприкосновения* в точке M_0 гладких кривых L_1 и L_2 с общей касательной M_0T по определению не ниже q (q — натуральное число), если

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^q} = 0 \quad (**)$$

(здесь h — длина отрезка M_1M_2 , концы M_1 и M_2 которого лежат на кривых L_1 и L_2 соответственно и проектируются на касательную M_0T в общую точку N , l — длина отрезка M_0N).

Порядок соприкосновения кривых L_1 и L_2 в общей точке M_0 по определению равен q (q — натуральное число), если выполнено условие (**), и либо

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{h}{l^{q+1}} \neq 0$$

либо отношение h/l^{q+1} не имеет предела при $l \rightarrow 0$. Кривые L_1 и L_2 имеют в общей точке M_0 *бесконечный порядок соприкосновения*, если условие (**) выполняется для любого натурального q .

Достаточные условия соприкосновения кривых: регулярные кривые L_1 и L_2 , заданные векторами $\mathbf{r}_1(l)$ и $\mathbf{r}_2(l)$ соответственно, имеют в общей точке M_0 , отвечающей значению $l=0$, порядок соприкосновения не ниже q , если

$$\mathbf{r}'_1(0) = \mathbf{r}'_2(0), \dots, \mathbf{r}_1^{(q)}(0) = \mathbf{r}_2^{(q)}(0);$$

если, кроме того,

$$\mathbf{r}_1^{(q+1)}(0) \neq \mathbf{r}_2^{(q+1)}(0),$$

то порядок соприкосновения кривых L_1 и L_2 равен q .

С. *Соприкасающейся окружностью* кривой L называется окружность, порядок соприкосновения которой с кривой L не ниже двух.

Достаточные условия существования соприкасающейся окружности: если кривизна k_1 кривой L в точке M_0 отлична от нуля, то

в этой точке существует соприкасающаяся окружность кривой L ; эта окружность расположена в соприкасающейся плоскости кривой L и ее радиус равен $1/k_1(M_0)$.

Центром (радиусом) кривизны кривой L в точке M_0 называется центр (радиус) ее соприкасающейся окружности в этой точке.

T . Эволютой регулярной кривой L называется множество ее центров кривизны.

Уравнение эволюты кривой L , заданной вектором $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{k_1(t)} \mathbf{n}(t),$$

где $\mathbf{n}(t)$ — вектор главной нормали кривой L в точке t .

$У$. Эвольвентой регулярной кривой L называется кривая, эволютой которой является сама кривая L .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой:

а) $\mathbf{r} = \{a \cos^3 t, a \sin^3 t\}$ (астроида);

б) $\mathbf{r} = \{a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\}$ (циклоида) (рис. 32).

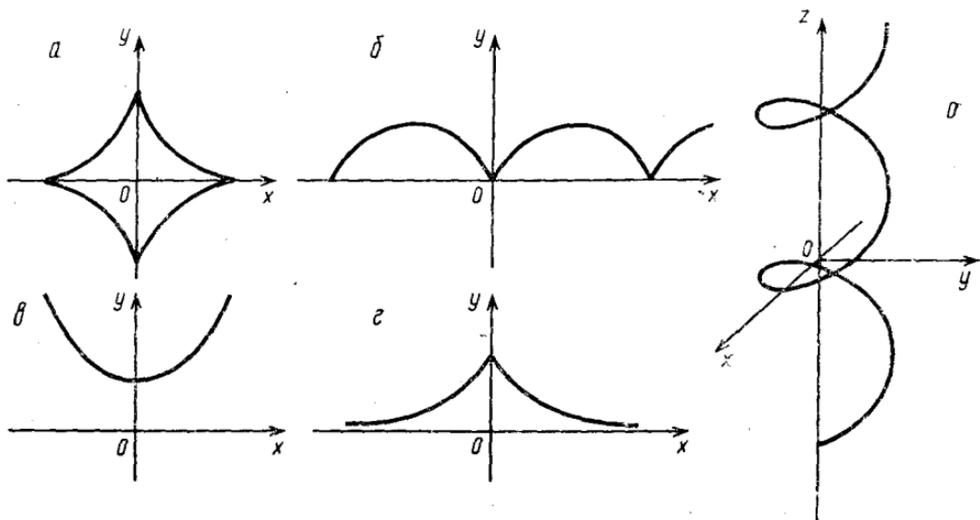


Рис. 32. а — астроида; б — циклоида; в — цепная линия; г — трактриса; д — винтовая линия

Ответ: а) $2x \sin t + 2y \cos t - a \sin 2t = 0$, $x \cos t - y \sin t - a \cos 2t = 0$;

б) $x - y \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \left(2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} - t \right) = 0$, $x \operatorname{tg} \frac{t}{2} + y - at \cdot \operatorname{tg} \frac{t}{2} = 0$

($t \neq (2k+1)\pi$); $y = 2a$, $x = (2k+1)\pi$ ($t = (2k+1)\pi$).

2. Вычислить длину кривой:

а) $r = \{a \cos^3 t, a \sin^3 t\}$, $0 \leq t \leq T \leq \frac{\pi}{2}$ (астроида);

б) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $0 \leq x \leq X$ (цепная линия);

в) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq T$ (винтовая линия).

Ответ: а) $s = \frac{3a}{2} \sin^2 T$; б) $s = a \operatorname{sh} \frac{X}{a}$; в) $s = \sqrt{a^2 + b^2} T$.

3. Написать уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости винтовой линии $r = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$.

Ответ:

$$r = \{a \cos t - ua \sin t, a \sin t + ua \cos t, b(t + u)\},$$

$$ax \sin t - ay \cos t - bz + b^2 t = 0,$$

$$r = \{a \cos t + ub \sin t, a \sin t - ub \cos t, bt + au\},$$

$$bx \sin t - by \cos t + az - abt = 0,$$

$$r = \{(a + u) \cos t, (a + u) \sin t, bt\},$$

$$x \cos t + y \sin t + bz - (a + b^2 t) = 0.$$

4. Вычислить кривизну плоской кривой:

а) $r = \{a \cos^3 t, a \sin^3 t\}$, $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ (астроида);

б) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (цепная линия).

Ответ: а) $k_1 = \frac{2}{3a \sin 2t}$; б) $k_1 = \frac{a}{y^2}$.

5. Вычислить кривизну и кручение кривой:

а) $r = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$; б) $r = \{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$.

Найти основной триэдр.

Ответ: а) $k_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $k_2 = \frac{b}{a^2 + b^2}$,

$$\tau = \left\{ -\frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\}, \quad \mathbf{n} = \{-\cos t, -\sin t, 0\},$$

$$\mathbf{b} = \left\{ \frac{b \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\};$$

$$б) k_1 = \frac{6}{25 \sin 2t}, \quad k_2 = \frac{8}{25 \sin 2t},$$

$$\tau = \left\{ -\frac{3}{5} \cos t, \quad \frac{3}{5} \sin t, \quad -\frac{4}{5} \right\}, \quad \mathbf{n} = \{ \sin t, \cos t, 0 \},$$

$$\mathbf{b} = \left\{ \frac{4}{5} \cos t, \quad -\frac{4}{5} \sin t, \quad -\frac{3}{5} \right\}.$$

6. Найти естественную параметризацию кривой:

$$\mathbf{r}(t) = \{ a \cos t, a \sin t, bt \}.$$

$$\text{Ответ: } \mathbf{r}(s) = \left\{ a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\}.$$

7. Составить натуральные уравнения кривой

$$\mathbf{r} = \{ a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at \}.$$

$$\text{Ответ: } k_1 = \frac{a}{2a^2 + s^2}, \quad k_2 = \frac{a}{2a^2 + s^2}.$$

8. Проверить, что формулы Френе можно записать в виде

$$\frac{d\tau}{ds} = \mathbf{d} \times \tau, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{d} \times \mathbf{b},$$

где $\mathbf{d} = k_2 \tau + k_1 \mathbf{n}$.

9. Найти соприкасающуюся окружность кривой

$$\mathbf{r} = \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} t^2, 2-t, t^3 \right\}$$

в точке $(0, 2, 0)$.

$$\text{Ответ: } \left(x - \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{6}, \quad z=0.$$

10. Найти соприкасающуюся окружность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: а) в точке $(a, 0)$; б) в точке $(0, b)$.

$$\text{Ответ: а) } \left(x - \frac{a^2 - b^2}{a} \right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}; \quad б) x^2 + \left(y + \frac{a^2 - b^2}{b} \right)^2 = \frac{a^4}{b^2}.$$

11. Найти порядок соприкосновения параболы $y^2 = 2px$ и окружности $(x-p)^2 + y^2 = p^2$ в точке $(0, 0)$.

О т в е т : 3.

12. Найти эволюту кривой:

а) $x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t$ (гипербола);

б) $x = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t, y = a \sin t$ (трактриса).

О т в е т : а) $x = \frac{a^2 + b^2}{a} \operatorname{ch}^3 t, y = \frac{a^2 + b^2}{b} \operatorname{sh}^3 t$; б) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

13. Найти эвольвенты окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

О т в е т : $x = a(\cos t + (t - C) \sin t), y = a(\sin t - (t - C) \cos t)$,

где C — параметр семейства эвольвент.

Простая поверхность получается путем непрерывной деформации (растяжений, сжатий и изгибаний) куска плоскости. В процессе такой деформации точка плоскости перемещается по некоторой траектории и переходит в определенную точку поверхности (рис. 1).

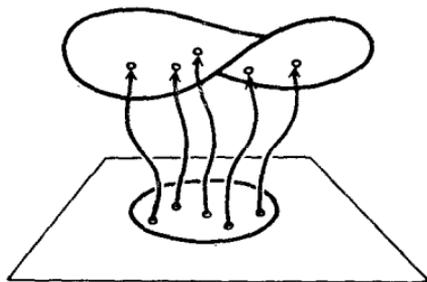


Рис. 1. Простая поверхность получается при помощи непрерывной деформации куска плоскости

Поверхности более общей природы уже нельзя получить деформацией куска плоскости. Они могут иметь самопересечения, участки самоналегания. Однако достаточно малая окрестность каждой точки такой поверхности устроена в некотором смысле как простая поверхность.

Для исследования геометрических свойств поверхностей целесообразно наложить на них определенные условия — условия регулярности. Ограничиваясь рассмотрением поверхностей без особенностей и развивая для их изучения эффективный аппарат, мы введем ряд важных характеристик поверхности, таких, как первая и вторая квадратичные формы, средняя и гауссова кривизны и др., покажем их роль в описании геометрических свойств поверхности как внутренних, так и внешних, найдем интересные связи между ними.

§ 1. ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ

1°. Плоские области

Множество точек $M(x, y)$ на плоскости Oxy , координаты x и y которых удовлетворяют неравенству

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2, \quad (1)$$

называется *открытым кругом* радиуса r с центром в точке $A(a, b)$.

Пусть D — множество точек на плоскости.

Точка M множества D называется его *внутренней точкой*, если существует открытый круг с центром в этой точке, целиком лежащий в D .

Множество точек на плоскости, каждая из которых является его внутренней точкой, называется *открытым множеством*.

Примерами открытых множеств могут служить: сам открытый круг, внутренняя часть треугольника, внутренняя часть квадрата и т. п.

Открытое множество D называется (*линейно*) *связным*, если любые две его точки соединить простой кривой \mathcal{L} так, чтобы $\mathcal{L} \subset D$.

Точка N называется *границей точкой* множества D , если в любом открытом круге с центром в точке N содержатся как точки, принадлежащие множеству D , так и точки, ему не принадлежащие.

Совокупность всех граничных точек множества D называется его *границей*.

Обозначение: ∂D .

Пример. Окружность

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

является границей открытого круга (1).

Множество $\bar{D} = D \cup \partial D$ называется *замыканием* множества D . Оно состоит из внутренних и граничных точек множества D .

Пример. Замыканием открытого круга (1) является круг

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2.$$

Множество точек на плоскости называется *ограниченным*, если существует круг, которому принадлежат все точки этого множества.

Простая замкнутая кривая \mathcal{L} разбивает плоскость на два множества, одно из которых (D) ограничено. Кривая \mathcal{L} является границей множества D . Будем говорить также, что множество D *охвачено* замкнутой кривой \mathcal{L} (рис. 2).

Связное множество D точек на плоскости называется *односвязным*, если для любой простой замкнутой кривой, принадлежащей множеству D , охватываемое ею множество также принадлежит D .

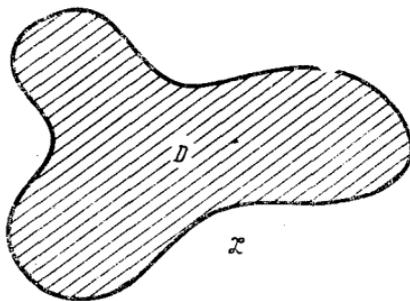


Рис. 2. Область D односвязна

Открытое односвязное множество точек на плоскости будем называть *плоской областью*.

2°. Простая поверхность

Пусть D — ограниченная плоская область и \bar{D} — ее замыкание.

Введем на плоскости координатную систему (u, v) . Пусть x, y, z — прямоугольные декартовы координаты точек в трехмерном евклидовом пространстве E^3 .

Зададим на множестве \bar{D} три непрерывные функции

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \\ (u, v) &\in \bar{D}. \end{aligned} \quad (2)$$

и предположим, что функции (2) обладают следующим свойством.

Свойство А. Если (u', v') и (u'', v'') — различные точки множества \bar{D} , то точки $M'(x', y', z')$ и $M''(x'', y'', z'')$ пространства E^3 , координаты которых вычислены по формулам (2)

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(u', v'), \quad y' = \psi(u', v'), \quad z' = \chi(u', v'), \\ x'' &= \varphi(u'', v''), \quad y'' = \psi(u'', v''), \quad z'' = \chi(u'', v''), \end{aligned}$$

также различны.

Определение. Множество S точек $M(x, y, z)$, координаты x, y, z которых определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \\ (u, v) &\in D, \end{aligned} \quad (3)$$

где функции φ, ψ и χ в замыкании \bar{D} области D обладают свойством *А*, называется *простой поверхностью*.

Множество точек $M(x, y, z)$ с координатами

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \\ (u, v) &\in \partial D, \end{aligned} \quad (4)$$

— образ границы ∂D области D — называется *границей* простой поверхности S .

Обозначение: ∂S .

Пример. Рассмотрим на плоскости параметров (u, v) прямоугольник

$$P = \{(u, v) \mid -1 < u < 2, |v| < 1\}.$$

Зададим в прямоугольнике P три функции

$$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad y=v, \quad z=u \frac{u^2-1}{u^2+1}. \quad (*)$$

Эти функции непрерывны и разным точкам (u', v') и (u'', v'') прямоугольника P соответствуют разные точки M' и M'' , координаты которых вычисляются по формулам (*). В этом совсем нетрудно убедиться, когда $v' \neq v''$. При $v' = v''$, $u' \neq 1$, $u'' \neq 1$ сказанное вытекает из того, что

$$\frac{z'}{x'} = -u', \quad \frac{z''}{x''} = -u''.$$

Множество точек пространства E^3 , координаты которых определяются соотношениями (*), имеет довольно сложный вид (рис. 3). Это объясняется тем, что в замкнутом прямоугольнике

$$\bar{P} = \{(u, v) \mid -1 \leq u \leq 2, |v| \leq 1\}$$

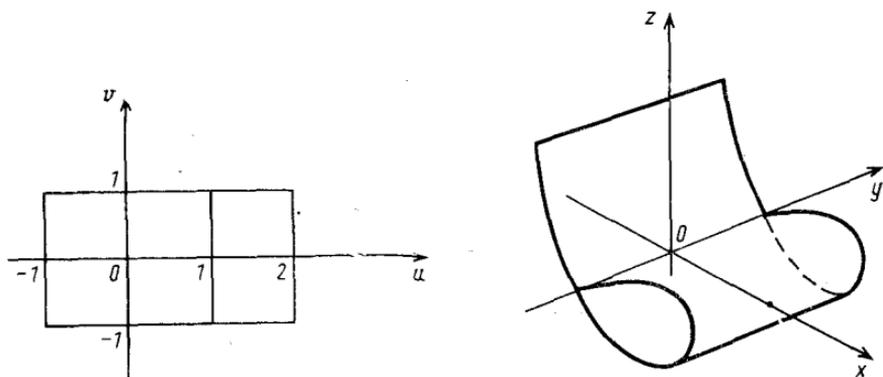


Рис. 3. Пример непростой поверхности

вертикальным отрезкам $u=-1$ и $u=1$ соответствует одно и то же множество точек на поверхности:

$$x=0, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad z=0.$$

Соотношения (3) называют *параметрическими уравнениями* простой поверхности S ; u и v — *параметры*. Говорят также, что простая поверхность S задается *параметрически*.

Пусть i, j и k — орты координатных осей. Тогда задание поверхности S при помощи формул (3) равносильно заданию одной векторной функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k}, \quad (5)$$

определенной в области D .

Если простая поверхность S задана соотношением (5), то говорят, что поверхность S задана *векторным уравнением*; векторную функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ называют *радиус-вектором* или просто *вектором поверхности S* .

Примеры простых поверхностей.

1. Пусть

$$z = f(x, y)$$

— функция, непрерывная в замыкании \bar{D} ограниченной открытой области D . Тогда ее график — множество точек

$$\{M(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

— простая поверхность S .

Параметрические уравнения этой поверхности имеют вид

$$x = u, y = v, z = f(u, v).$$

Все эти функции непрерывны в замкнутой области \bar{D} и различным точкам (u', v') и (u'', v'') из D отвечают различные точки $M'(x', y', z')$ и $M''(x'', y'', z'')$ поверхности S (рис. 4).

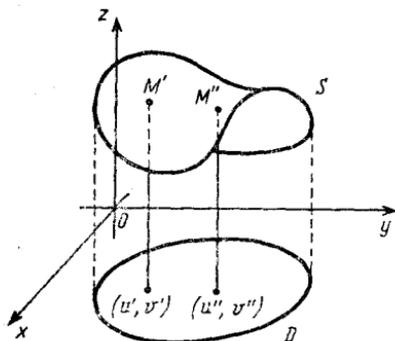


Рис. 4. График непрерывной функции — простая поверхность

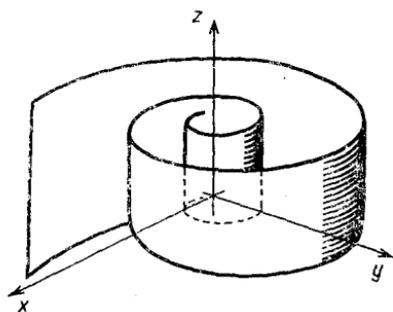


Рис. 5. Цилиндрическая поверхность со спиралевидной направляющей

З а м е ч а н и е. Процесс непрерывной деформации куска плоскости в простую поверхность можно проиллюстрировать на рассмотренном выше примере.

Обратимся к семейству поверхностей, зависящих от параметра t — параметра деформации:

$$\begin{aligned}x &= u, & y &= v, & z &= tf(u, v), \\(u, v) &\in D, & 0 &\leq t \leq 1.\end{aligned}$$

При изменении параметра t от 0 до 1 область D (кусочек плоскости) подвергается непрерывной деформации: при $t=0$ имеем плоскую область D , а при $t=1$ — рассматриваемую простую поверхность S .

$$P = \{(u, v) | 0 < u < 4\pi, 0 < v < 1\}$$

— открытый прямоугольник на плоскости (u, v) .

Набор функций

$$x = u \cos u, \quad y = u \sin u, \quad z = v$$

задает в пространстве E^3 простую поверхность (рис. 5).

Одна и та же простая поверхность может иметь разные параметрические представления.

Например, уравнения

$$\begin{aligned}x &= u, & y &= v, & z &= \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \\(u^2 + v^2 &< R^2)\end{aligned}$$

и уравнения

$$\begin{aligned}x &= R \cos u \cos v, & y &= R \cos u \sin v, & z &= R \sin u \\(0 < u &\leq \pi/2, & 0 < v &\leq 2\pi)\end{aligned}$$

задают одну и ту же простую поверхность — верхнюю полусферу радиуса R с центром в начале координат.

3°. Локально простая поверхность

Пусть S — множество точек евклидова пространства E^3 , X — точка из S .

Окрестностью точки X на множестве S будем называть пересечение (общую часть) множества S и открытого шара с центром в точке X (рис. 6).

Определение. Связное множество S в пространстве E^3 называется *локально-простой поверхностью*, если у каждой точки этого множества есть окрестность, представляющая собой простую поверхность.

Пример. Сфера — локально-простая поверхность: малая окрестность каждой точки сферы является графиком непрерывной функции (в подходящей системе координат) и поэтому представляет собой простую поверхность. Однако вся сфера простой поверхностью не является (рис. 7).

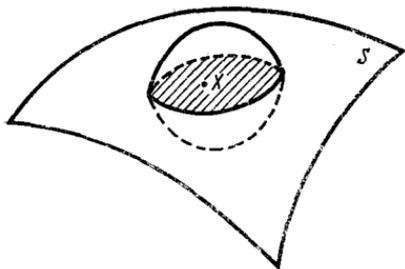


Рис. 6. Окрестность точки X на множестве S отмечена штрихами

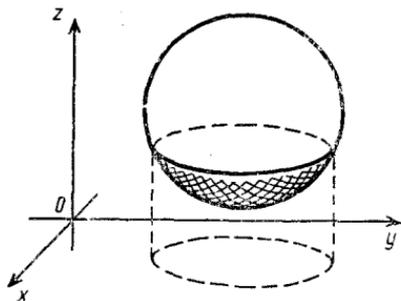


Рис. 7. У каждой точки сферы можно указать окрестность, которая является графиком непрерывной функции

Приведем еще один пример локально-простой поверхности.

Множество точек, которое заметает окружность при своем вращении вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и не имеющей с ней общих точек, называется тором. Тор — локально-простая поверхность, так как малая окрестность любой точки тора является графиком непрерывной функции (рис. 8—10).

4°. Общая поверхность

Начнем рассмотрение с двух примеров.

Пример 1. Зададим в прямоугольнике

$$P = \{(u, v) \mid -2 < u < 2, 0 < v < 2\}$$

на плоскости (u, v) функции

$$x = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad y = u \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad z = v. \quad (*)$$

Множество точек $M(x, y, z)$, координаты которых определяются по формулам (*), представляет собой цилиндрическую поверхность, направляющей которой является отрезок строfoиды

$$x = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad y = u \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad -2 < u < 2$$

(см. гл. 1, § 1, п. 2°), а образующая параллельна оси Oz .

Точкам $M_-(-1, v)$ и $M_+(1, v)$ прямоугольника P правило (*) ставит в соответствие одну точку

$$(0, 0, v)$$

цилиндрической поверхности (рис. 11).

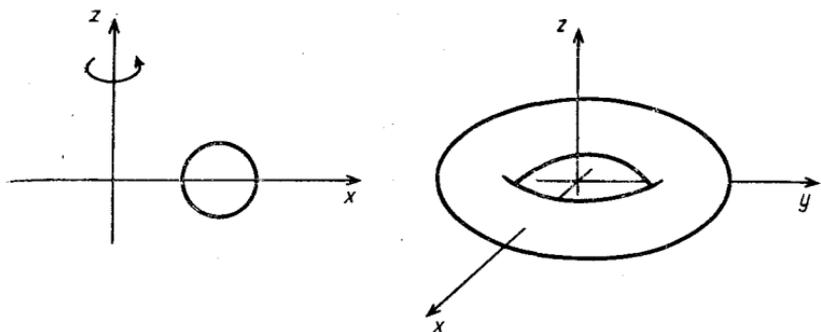


Рис. 8. Тор как поверхность, образованная вращением окружности

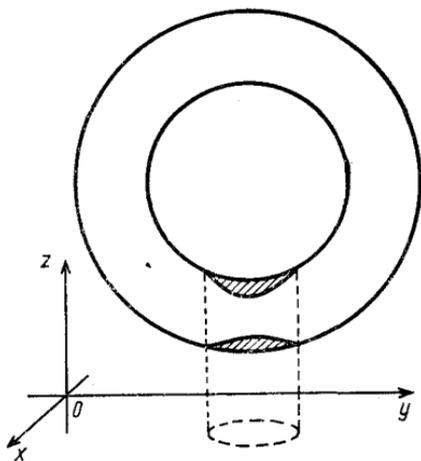


Рис. 9. У каждой точки тора можно указать окрестность, которая (в некоторой системе координат) является графиком непрерывной функции

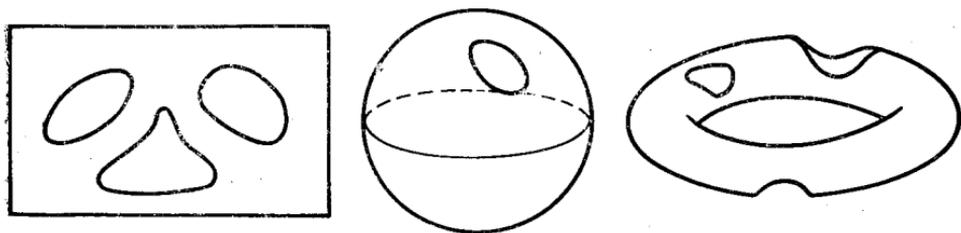


Рис. 10. Часть плоскости, сфера и тор с конечным числом отверстий являются локально простыми поверхностями (края отверстий поверхностям не принадлежат)

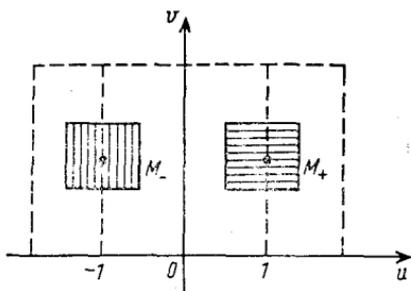


Рис. 11. Образы точек M_- и M_+ при заданном отображении совпадают

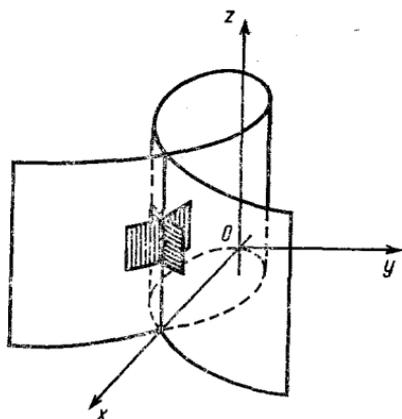


Рис. 12. Общая поверхность с линией самопересечения

Тем самым рассматриваемая поверхность имеет линию самопересечения — прямолинейный отрезок

$$x=0, \quad y=0, \quad z=v, \quad |v| < 2.$$

Выделим достаточно малую окрестность U_- точки M_- (на рис. 11 она заштрихована вертикально) и рассмотрим соответствующее ей по правилу (*) множество точек S_- . Ясно, что разным точкам (u', v') и (u'', v'') из окрестности U_- соответствуют различные точки S_- . Это означает, что S_- — простая поверхность (рис. 12).

Аналогично, выбирая достаточно малую окрестность U_+ точки M_+ , получаем простую поверхность S_+ .

Тем не менее никакая окрестность точки X на множестве S простой поверхностью не является (рис. 13).

Таким образом, поверхность S , задаваемая соотношениями (*), локально-простой поверхностью не является. Это более общая поверхность.

Пример 2. Пусть G — цилиндрический пояс. Поверхность S расположена внутри пояса G и имеет участок самоналегания $ABCD$ (рис. 14).

Стрелками указано, каким путем поверхность S получается из цилиндрического пояса G . При этом некоторый участок нижней части цилиндрического пояса перейдет в нижнюю сторону участка самоналегания, а некоторый участок верхней части цилиндрического пояса перейдет в верхнюю сторону участка самоналегания.

Ясно, что поверхность S не локально-простая, а более общая поверхность.

Приведенные примеры показывают, что существуют поверхности, которые устроены довольно сложно.

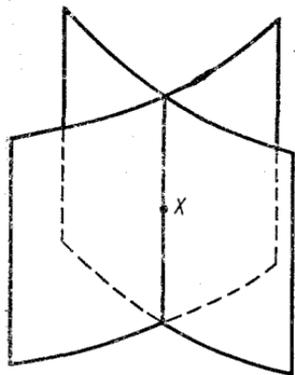


Рис. 13. Никакая окрестность точки X не является простой поверхностью

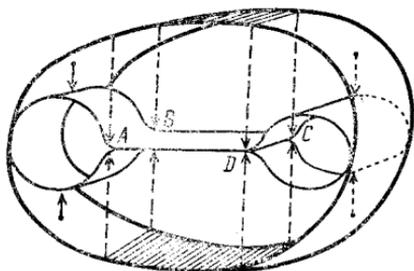


Рис. 14. Общая поверхность с областью самоналегания

Пусть A и B — некоторые подмножества пространства E^3 и h — отображение одного из них в другое:

$$h : A \rightarrow B.$$

То, что отображение h переводит точку X множества A в точку Y множества B , обозначается так: $Y=h(X)$. При этом точка Y называется *образом* точки X , а точка X — *прообразом* точки Y .

Отображение $h : A \rightarrow B$ называется *взаимно однозначным*, если

- 1) различные точки X_1 и X_2 множества A отображаются в различные точки $Y_1=h(X_1)$ и $Y_2=h(X_2)$ множества B и
- 2) для каждой точки Y множества B можно найти точку X множества A , такую, что $h(X)=Y$.

У взаимно однозначного отображения h существует *обратное* отображение h^{-1} , посредством которого каждая точка Y множества B отображается в свой (единственный) прообраз X .

Отображение $h : A \rightarrow B$ называется *непрерывным в точке X* множества A , если для любой последовательности точек X_n множества A , расстояния которых до точки X стремятся к нулю, $d(X_n, X) \rightarrow 0$, соответствующая последовательность образов $h(X_n)$ из множества B обладает свойством

$$d(h(X_n), h(X)) \rightarrow 0.$$

Отображение $h : A \rightarrow B$ называется *непрерывным на множестве A* , если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Взаимно однозначное и непрерывное отображение $h : A \rightarrow B$, обратное к которому h^{-1} также непрерывно, называется *гомеоморфным* отображением множества A на множество B .

Образ плоской области при гомеоморфном отображении — простая поверхность.

Образ плоской области при гомеоморфном отображении — простая поверхность.

Образ плоской области при гомеоморфном отображении — простая поверхность.

Пусть S — локально-простая поверхность.

Рассмотрим заданное на ней отображение h , обладающее следующим свойством: у каждой точки $X \in S$ есть окрестность U на этой поверхности, такая, что отображение h этой окрестности на ее образ $h(U)$ является гомеоморфным, т. е. взаимно однозначным и взаимно непрерывным.

Образ локально-простой поверхности при таком отображении h называется *общей поверхностью*.

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать достаточно малые окрестности точек на поверхностях, т. е. ограничимся, по существу, только простыми поверхностями.

§ 2. ГЛАДКИЕ И РЕГУЛЯРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

1°. Касательная плоскость к поверхности

Пусть S — простая поверхность, X_0 и X_1 — различные ее точки.

Определение. Плоскость π , проходящая через точку X_0 , называется *касательной* к поверхности S в точке X_0 , если при стремлении переменной точки X поверхности к точке X_0 (по произвольному закону) угол между прямой X_0X и плоскостью π стремится к нулю (рис. 15).

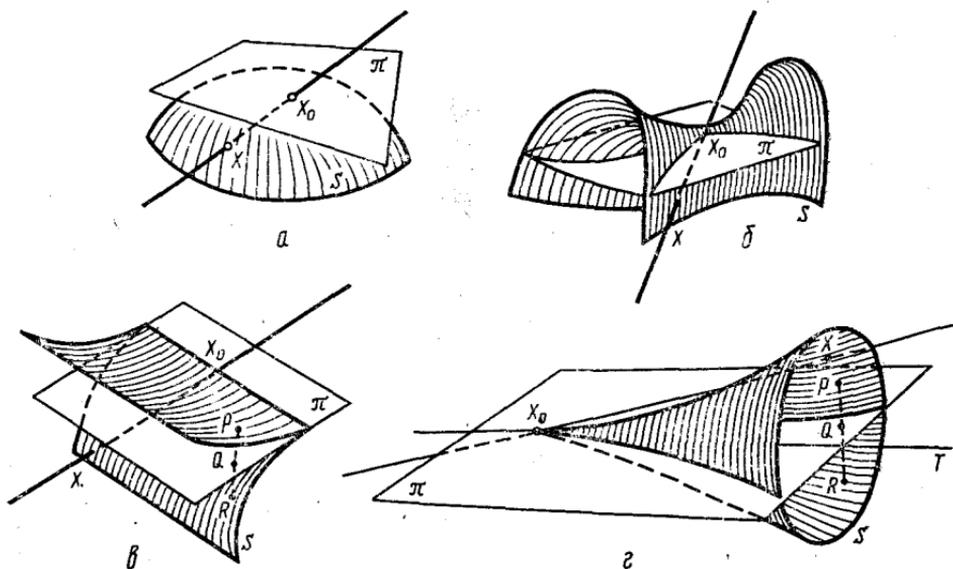


Рис. 15. Поверхности, изображенные на рисунках a и $б$, — гладкие в точке X_0 . Поверхности, изображенные на рисунках $в$ и $г$, в точке X_0 не являются гладкими: как угодно близко от точки X_0 имеются точки P и Q , проектирующиеся в одну точку касательной плоскости π (любая плоскость, проходящая через прямую X_0T , является касательной к поверхности S на рисунке $г$)

2°. Гладкие поверхности

Простая поверхность S называется *гладкой* в точке X_0 , если в этой точке существует касательная плоскость π к поверхности S и некоторая окрестность точки X_0 на поверхности S однозначно проектируется на плоскость π .

Точки, в которых нарушается гладкость поверхности, принято называть *особыми*.

Простая поверхность S называется *гладкой*, если она является гладкой в каждой точке и касательные плоскости изменяются непрерывно.

Последнее означает, что если X и Y — точки поверхности S и π_x и π_y — касательные плоскости к поверхности S в этих точках, то при $X \rightarrow Y$ имеем $\pi_x \rightarrow \pi_y$.

Прямая, проходящая через точку X_0 гладкой поверхности S и перпендикулярная касательной плоскости к поверхности S в этой точке, называется *нормалью* к поверхности S в точке X_0 .

3°. Дифференцирование и интегрирование векторных функций двух аргументов

Выше (см. п. 1° § 1) мы отмечали, что простую поверхность можно задавать при помощи векторной функции двух аргументов. Это означает, что при изучении свойств поверхностей таким функциям отводится значительная роль. Введем для векторных функций в полной аналогии со скалярными функциями двух переменных понятия предела, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости.

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — векторная функция, заданная в плоской области \mathcal{D} .

Будем говорить, что функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ имеет *пределом* вектор \mathbf{b} при $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$, если

$$|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{b}| \rightarrow 0, \text{ когда } |u - u_0| + |v - v_0| \rightarrow 0.$$

Обозначение: $\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{b}$.

Функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ называется *непрерывной* в точке (u_0, v_0) , если

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u_0, v_0).$$

Для векторной функции вводятся понятия частных производных в точке

$$\begin{aligned} r'_u &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta u}, \\ r'_v &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta v}. \end{aligned}$$

Если

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = ix(u, v) + jy(u, v) + kz(u, v),$$

то векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v равны соответственно

$$\mathbf{r}_u = ix_u + jy_u + kz_u,$$

$$\mathbf{r}_v = ix_v + jy_v + kz_v.$$

Функция $\mathbf{r}(u, v)$ называется дифференцируемой в точке (u, v) , если ее полное приращение

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)$$

для произвольных $\Delta u, \Delta v$ можно представить в виде

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_u(u, v) \Delta u + \mathbf{r}_v(u, v) \Delta v + \mathbf{o}(\rho), \quad (1)$$

где вектор $\mathbf{o}(\rho)$, $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$, удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{o}(\rho)|}{\rho} = 0.$$

Если векторная функция $\mathbf{r}(u, v)$ дифференцируема в каждой точке области \mathcal{D} , то говорят, что $\mathbf{r}(u, v)$ дифференцируема в области \mathcal{D} .

Главная линейная часть $\mathbf{r}_u \Delta u + \mathbf{r}_v \Delta v$ приращения дифференцируемой векторной функции $\mathbf{r}(u, v)$ называется ее дифференциалом — $d\mathbf{r}$. Если u и v — независимые переменные, то можно считать $\Delta u = du, \Delta v = dv$, так что

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \Delta u + \mathbf{r}_v \Delta v = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv. \quad (2)$$

Формула Тейлора для функции $\mathbf{r}(u, v)$ с центром разложения в точке (u, v) с остаточным членом в форме Пеано может быть записана так:

$$\Delta \mathbf{r} = d\mathbf{r} + \frac{1}{2!} d^2 \mathbf{r} + \frac{1}{3!} d^3 \mathbf{r} + \dots + \frac{1}{n!} d^n \mathbf{r} + \mathbf{o}(\rho^n), \quad (3)$$

где $d\mathbf{r}$ определяется равенством (2), а

$$d^k \mathbf{r} = \left(\frac{\partial}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial}{\partial v} \Delta v \right)^{(k)} \mathbf{r} = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right)^{(k)} \mathbf{r}.$$

Например, при $k=2$ получаем

$$\begin{aligned} d^2 \mathbf{r} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right)^2 \mathbf{r} = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} dudv + \frac{\partial^2}{\partial v^2} dv^2 \right) \mathbf{r} = \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} dudv + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} dv^2 = \mathbf{r}_{uu} du^2 + 2\mathbf{r}_{uv} dudv + \mathbf{r}_{vv} dv^2. \end{aligned}$$

Интеграл по области $G \subset \mathcal{D}$ от векторной функции $\mathbf{r}(u, v)$ можно ввести при помощи соотношения

$$\iint_G \mathbf{r}(u, v) dudv = i \iint_G x(u, v) dudv + j \iint_G y(u, v) dudv + k \iint_G z(u, v) dudv.$$

4°. Дифференцируемость векторной функции и касательная плоскость

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — векторное уравнение простой поверхности S . Иными словами, S — годограф векторной функции $\mathbf{r}(u, v)$, т. е. множество концов всех векторов $\mathbf{r}(u, v)$, откладываемых от начальной точки $O(0, 0)$.

Будем считать, что эта функция дифференцируема в точке (u_0, v_0) . Обозначим через X_0 точку поверхности S , отвечающую (u_0, v_0) , а через X — точку, отвечающую (u, v) .

По условию дифференцируемости векторной функции $\mathbf{r}(u, v)$ в точке (u_0, v_0) имеем

$$\overrightarrow{X_0 X} = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \Delta u + \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \Delta v + \mathbf{o}(\rho), \quad (4)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$ и $\frac{|\mathbf{o}(\rho)|}{\rho} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ (рис. 16).

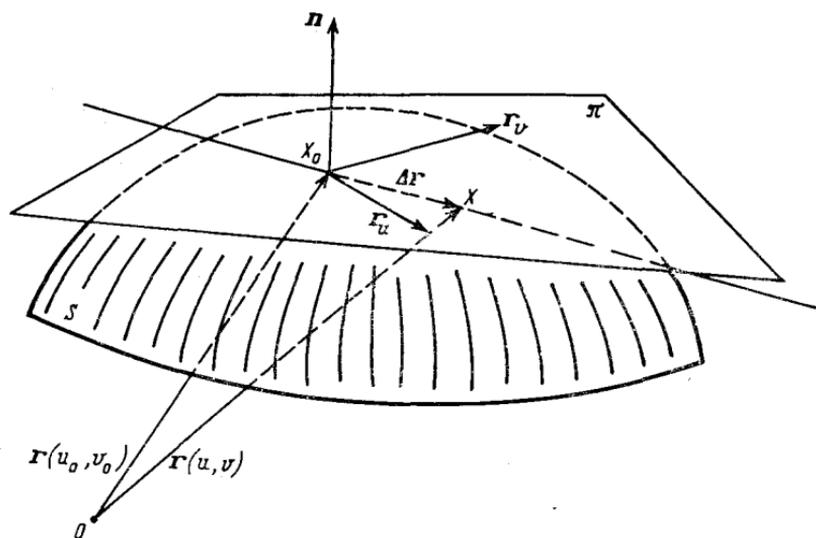


Рис. 16. При $\Delta \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$ угол между прямой $X_0 X$ и вектором \mathbf{n} стремится к $\pi/2$

Отложим векторы $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ и $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ от точки X_0 (считая, что по крайней мере один из этих векторов ненулевой) и проведем через точку X_0 плоскость π , содержащую векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v . Если векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v коллинеарны, то рассмотрим какую-либо из плоскостей, проходящих через точку X_0 и эти векторы.

Убедимся в том, что π — касательная плоскость к поверхности.

Для этого достаточно показать, что угол между прямой X_0X и нормалью к плоскости π стремится к $\pi/2$. Составим скалярное произведение вектора $\frac{1}{\rho} \overrightarrow{X_0X} = \frac{1}{\rho} \Delta \mathbf{r}$ и единичного вектора нормали \mathbf{n} .

Из формулы (4) получим, что

$$\left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\rho}, \mathbf{n} \right) = \left(\frac{o(\rho)}{\rho}, \mathbf{n} \right) \rightarrow 0$$

где $\rho \rightarrow 0$.

Так как составленное скалярное произведение стремится к нулю, то угол между прямой X_0X и нормалью к поверхности стремится к прямому. Это и означает, что плоскость π — касательная к поверхности S в точке X_0 .

Итак, дифференцируемость векторной функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ в точке (u_0, v_0) означает, что в точке $X_0(u_0, v_0)$ поверхности S , заданной векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, существует касательная плоскость.

5°. Достаточные условия гладкости поверхности

Пусть поверхность S задана векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Будем считать функцию $\mathbf{r}(u, v)$ дифференцируемой в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) , которой отвечает точка $X_0(u_0, v_0)$ поверхности S .

ТЕОРЕМА 1. Если производные \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v непрерывны в точке (u_0, v_0) и линейно независимы в этой точке, то поверхность S является гладкой в точке X_0 .

* Так как в точке (u_0, v_0) векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v линейно независимы, то в точке X_0 поверхности S существует единственная касательная плоскость π (см. п. 4°). Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпало с точкой X_0 , оси Ox и Oy располагались в плоскости π , а ось Oz была направлена по нормали к поверхности S в точке X_0 (рис. 17).

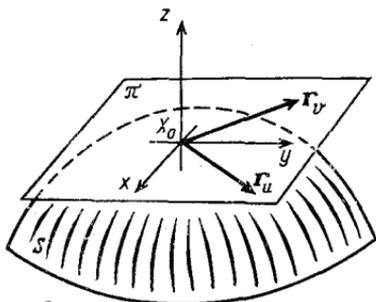


Рис. 17. Векторы $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ и $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ располагаются в касательной плоскости π

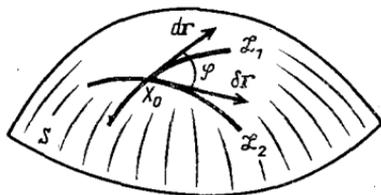


Рис. 18. Угол между кривыми \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 на поверхности S

Пусть $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ — координаты вектора $\mathbf{r}(u, v)$ в выбранной системе координат. Тогда

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right).$$

Первые две координаты этого вектора в точке (u_0, v_0) обращаются в нуль:

$$\left(0, 0, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)} \right).$$

Так как векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v неколлинеарны и непрерывны в точке (u_0, v_0) , то

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

в некоторой окрестности этой точки.

Обратимся теперь к параметрическим уравнениям поверхности S . Имеем

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (5)$$

При наших требованиях и полученных выше выводах для первых двух уравнений (5) выполнены все условия разрешимости относительно u и v , так что в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ плоскости π (координатной плоскости xOy) существуют функции

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (6)$$

имеющие непрерывные производные в точке $(0, 0)$. Мы можем перейти к новым параметрам x и y , подставляя функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в формулы (5).

В результате получим, что в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ плоскости π поверхность S будет задаваться параметрическими уравнениями:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z(u(x, y), v(x, y)) = z(x, y),$$

т. е. поверхность S будет графиком функции $z = z(x, y)$.

Последнее означает, что в некоторой окрестности точки X_0 поверхность S однозначно проектируется на касательную плоскость π и является поэтому гладкой в этой точке. *

Достаточное условие гладкости поверхности.

Для того чтобы поверхность S , заданная векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, была гладкой, достаточно, чтобы функция $\mathbf{r}(u, v)$ имела непрерывные производные \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v в области заданных параметров и в этой области $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$.

* Действительно, в этом случае обеспечивается гладкость поверхности S в каждой точке, непрерывность же касательных плоскостей к поверхности S вытекает из непрерывности векторов \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v . *

6°. Регулярные поверхности

Поверхность S , заданную векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{D},$$

будем называть C^k -регулярной, если в области задания параметров \mathcal{D} функция $\mathbf{r}(u, v)$ имеет непрерывные производные порядка k ($k \geq 2$) и во всех точках области \mathcal{D} выполняется неравенство $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$.

§ 3. ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ. ИЗМЕРЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ

1°. Первая квадратичная форма поверхности

Пусть S — гладкая поверхность, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — ее векторное уравнение и $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$.

Первой квадратичной формой поверхности S называют выражение

$$I = d\mathbf{r}^2. \quad (1)$$

Запишем это выражение подробнее. Имеем

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv, \quad d\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) dudv + \mathbf{r}_v^2 dv^2,$$

откуда

$$I = \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) dudv + \mathbf{r}_v^2 dv^2. \quad (2)$$

Выражение (2) в каждой точке поверхности S представляет собой квадратичную форму от дифференциалов du и dv .

Первая квадратичная форма является знакоположительной, так как ее дискриминант

$$\mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)^2 > 0 \text{ и } \mathbf{r}_u^2 > 0.$$

Для коэффициентов первой квадратичной формы часто используют следующие обозначения:

$$\mathbf{r}_u^2 = E, \quad (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = F, \quad \mathbf{r}_v^2 = G.$$

Так что выражение (2) для формы I можно переписать в виде

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (3)$$

где $EG - F^2 > 0$.

2°. Длина кривой на поверхности

Кривую \mathcal{L} на поверхности S с векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ можно задать следующим образом.

Пусть $u=u(t)$, $v=v(t)$ — функции параметра t , $t_0 \leq t \leq t_1$. Тогда векторная функция

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$$

определяет кривую, расположенную на поверхности S .

Это позволяет рассматривать соотношения

$$u=u(t), \quad v=v(t)$$

как уравнения кривой \mathcal{L} на поверхности S .

Пусть \mathcal{L} — гладкая кривая на поверхности S . Вычислим длину $s(t)$ этой кривой между точками $X(t_0)$ и $X(t)$. Так как $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ — векторное уравнение кривой \mathcal{L} , то дифференциал дуги этой кривой можно выразить так:

$$ds = |d\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'(u(t), v(t))| dt = \sqrt{d\mathbf{r}^2} = \sqrt{I} = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt,$$

откуда

$$s(t) = \int_{\mathcal{L}(X_0, X)} \sqrt{I}$$

или, более подробно,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt. \quad (4)$$

3°. Угол между кривыми на поверхности

Пусть гладкие кривые \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 лежат на поверхности S с векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ и пересекаются в некоторой точке X_0 .

Вектор

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

лежит в касательной плоскости к поверхности S в точке X_0 (рис. 18). Значения дифференциалов du и dv можно выбрать так, чтобы он был вектором касательной к кривой \mathcal{L}_1 в точке X_0 . Достаточно взять

$$du = u'(t_0) dt, \quad dv = v'(t_0) dt$$

(здесь $u=u(t)$, $v=v(t)$ — уравнения кривой \mathcal{L}_1 на поверхности S).

Аналогично строится вектор $\delta\mathbf{r}$ — вектор касательной к кривой \mathcal{L}_2 в точке X_0 , отвечающий значениям дифференциалов δu , δv функций, определяющих кривую \mathcal{L}_2 :

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v.$$

Поэтому

$$\cos \varphi = \frac{(dr, \delta r)}{\sqrt{dr^2} \sqrt{\delta r^2}}. \quad (5)$$

Так как

$$\begin{aligned} dr^2 &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ \delta r^2 &= E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2, \\ dr \delta r &= (r_u du + r_v dv)(r_u \delta u + r_v \delta v) = \\ &= r_u^2 du \delta u + (r_u, r_v)(du \delta v + dv \delta u) + r_v^2 dv \delta v = \\ &= E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v, \end{aligned}$$

то формулу (5) можно переписать следующим образом:

$$\cos \varphi = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}. \quad (6)$$

Пример. Найдем угол между координатными линиями u и v .

Для линии u (меняется лишь u ; $v = \text{const}$) имеем следующие значения дифференциалов: du и $dv = 0$; для линии v : $\delta u = 0$ и δv .

По формуле (6) получаем, что

$$\cos \varphi = \frac{F du \delta v}{\sqrt{E du^2} \sqrt{G \delta v^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Из последнего соотношения видно, что если семейства линий u и v образуют ортогональную сеть, то

$$F = 0$$

в каждой точке поверхности. Справедливо и обратное.

Замечание. Вектор $dr = r_u du + r_v dv$ задает направление на поверхности в точке X_0 . Это направление часто обозначают так $(du : dv)$.

4°. Площадь поверхности

Пусть поверхность S определяется радиус-вектором

$$r = r(u, v),$$

причем параметры u и v изменяются в области \mathcal{D} плоскости (u, v) .

Разобьем область \mathcal{D} на части прямыми линиями $u = u_i$, $v = v_k$, параллельными координатным осям u и v соответственно (рис. 19). Ясно, что линиями $r(u_i, v)$ и $r(u, v_k)$ будет разбита на части и поверхность S . Выделим в области \mathcal{D} произвольный четырехугольник \mathcal{D}_{ik} . На поверхности S ему отвечает криволинейный четырехугольник S_{ik} . Последний мало отличается от па-

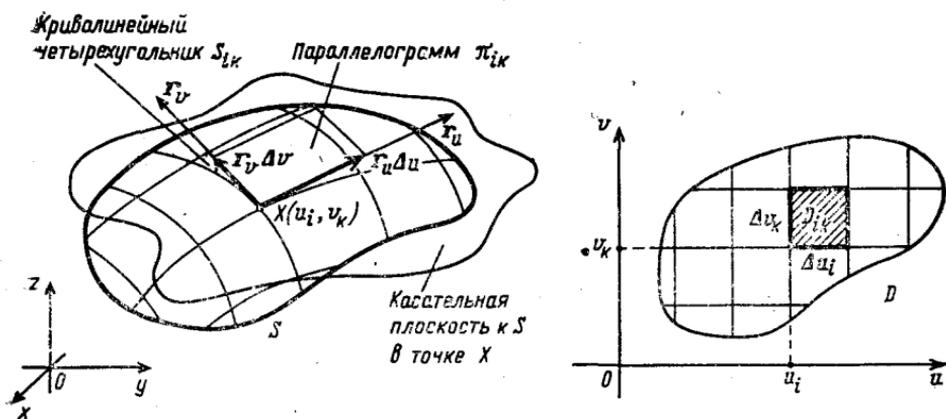


Рис. 19. Разбиению области изменения параметров соответствует разбиение поверхности

параллелограмма Π_{ik} со сторонами, определяемыми векторами $\mathbf{r}_u(u_i, v_k)\Delta u_i = \mathbf{r}_u \Delta u_i$, $\mathbf{r}_v(u_i, v_k)\Delta v_k = \mathbf{r}_v \Delta v_k$.

Этот параллелограмм лежит в касательной плоскости к поверхности S в точке $X(u_i, v_k)$. Его площадь σ_{ik} равна

$$\sigma_{ik} = |\mathbf{r}_u \Delta u_i \times \mathbf{r}_v \Delta v_k| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u_i \Delta v_k.$$

Возьмем за приближенное значение площади криволинейного четырехугольника S_{ik} площадь σ_{ik} параллелограмма Π_{ik} , а за приближенное значение площади поверхности S сумму

$$\sum \sigma_{ik}$$

всех таких параллелограммов.

Естественно определить площадь поверхности S как предел сумм $\sum \sigma_{ik}$ при стремлении к нулю величин Δu_i и Δv_k .

При условии непрерывности производных \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v этот предел σ существует и равен

$$\iint_S |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

Итак, по определению площадь σ поверхности равна

$$\sigma = \iint_S |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \quad (7)$$

Запишем формулу (7) в несколько ином виде. Воспользуемся следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| &= \sqrt{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2} = \sqrt{|\mathbf{r}_u|^2 |\mathbf{r}_v|^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{r_u^2 r_v^2 - (|\mathbf{r}_u| |\mathbf{r}_v| \cos \varphi)^2} = \sqrt{r_u^2 r_v^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2}. \end{aligned}$$

Так как $r_u^2 = E$, $(r_u, r_v) = F$, $r_v^2 = G$, то окончательно получим

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Поэтому формулу (7) можно записать так:

$$\sigma = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда поверхность S представляет собой график функции $z = f(x, y)$, заданной в области \mathcal{D} (рис. 20). Положим $u = x$, $v = y$. Радиус-вектор поверхности $r(x, y)$ имеет вид

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

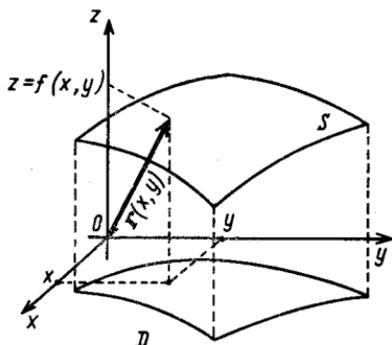


Рис. 20. Вычисление площади графика функции

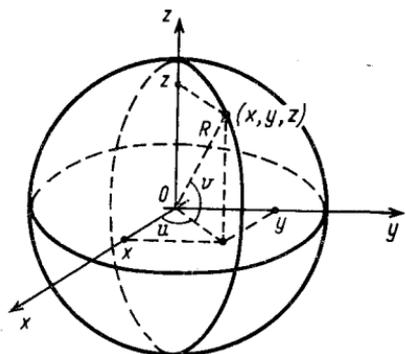


Рис. 21. Вычисление площади сферы

Отсюда

$$\begin{aligned} r_x &= (1, 0, f_x), \quad r_y = (0, 1, f_y), \\ E = r_x^2 &= 1 + f_x^2, \quad G = r_y^2 = 1 + f_y^2, \quad F = (r_x, r_y) = f_x f_y, \\ EG - F^2 &= 1 + f_x^2 + f_y^2. \end{aligned}$$

Поэтому площадь σ поверхности S — графика функции $z = f(x, y)$ — можно вычислять по формуле

$$\sigma = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy.$$

Пример. Вычислим площадь сферы радиуса R (рис. 21). Параметрические уравнения сферы имеют следующий вид:

$$x = R \cos v \cos u, \quad y = R \cos v \sin u, \quad z = R \sin v,$$

$$\mathcal{D} = \left\{ (u, v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Путем простых вычислений найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= (-R \cos v \sin u, R \cos v \cos u, 0), \\ \mathbf{r}_v &= (-R \sin v \cos u, -R \sin v \sin u, R \cos v), \\ E = r_u^2 &= R^2 \cos^2 v, \quad G = r_v^2 = R^2, \quad F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = 0, \end{aligned}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos v,$$

$$\sigma = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2} du dv = R^2 \int_0^{2\pi} du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv = 4\pi R^2.$$

5°. Внутренняя геометрия поверхности. Изометричные поверхности

Мы убедились, что, зная первую квадратичную форму поверхности, можно вычислять длины кривых на поверхности, углы между кривыми и площади областей на поверхности. В самом деле, в формулы (4) для длины дуги, (6) для косинуса угла между кривыми и (8) для площади области на поверхности входят лишь коэффициенты E , F и G первой квадратичной формы. Поэтому если известна первая квадратичная форма поверхности, можно исследовать геометрию на поверхности, не обращаясь к ее уравнениям, а лишь используя ее первую квадратичную форму.

Совокупность геометрических фактов, относящихся к поверхности, которые можно получить при помощи ее первой квадратичной формы, составляет так называемую *внутреннюю геометрию поверхности*.

Поверхности, имеющие одинаковые первые квадратичные формы и потому имеющие одинаковую внутреннюю геометрию, называются *изометричными*.

Пример. Пусть поверхность S задана параметрическими уравнениями (рис. 22)

$$x = u, \quad y = \sin u, \quad z = v.$$

Это цилиндрическая поверхность с синусоидой в качестве направляющей. Вычислим векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v . Имеем

$$\mathbf{r}_u = (1, \cos u, 0), \quad \mathbf{r}_v = (0, 0, 1),$$

поэтому

$$E = r_u^2 = 1 + \cos^2 u, \quad G = r_v^2 = 1, \quad F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = 0.$$

Следовательно,

$$ds^2 = (1 + \cos^2 u) du^2 + dv^2. \quad (9)$$

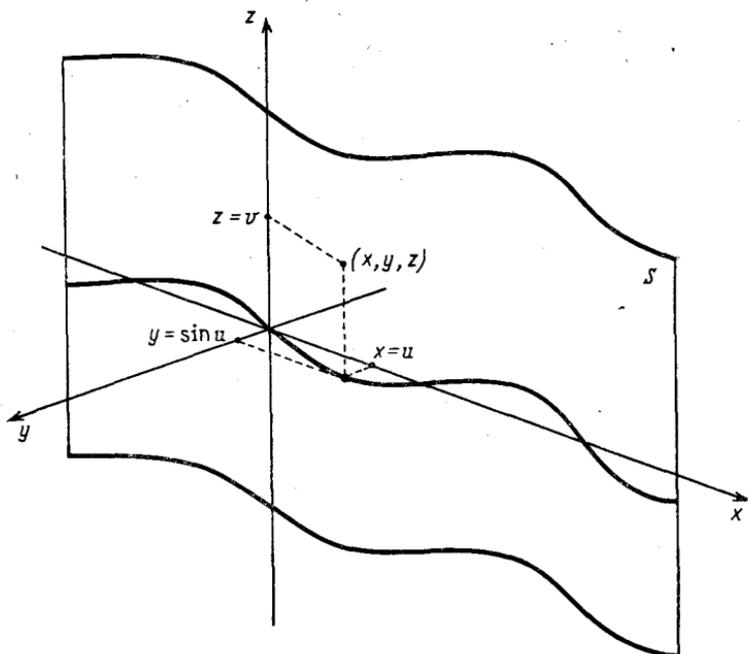


Рис. 22. Пример поверхности, изометричной плоскости

Введем новые параметры X и Y по формулам

$$X = \int_0^u \sqrt{1 + \cos^2 \xi} d\xi, \quad Y = v.$$

Тогда первая квадратичная форма поверхности S примет вид

$$ds^2 = dX^2 + dY^2.$$

Мы видим, что в новых переменных X и Y первая квадратичная форма рассматриваемой цилиндрической поверхности совпадает с первой квадратичной формой плоскости (X, Y) и поэтому внутренняя геометрия этой поверхности совпадает с внутренней геометрией плоскости (X, Y) .

Геометрически это свойство понятно: синусоидальный цилиндр получается *изгибанием* (деформацией без сжатий и растяжений) обычной плоскости. При такой деформации внутренняя геометрия не изменяется.

Вообще если поверхность S_1 получается из поверхности S_2 путем изгибания, то внутренние геометрии этих поверхностей совпадают.

§ 4. ВТОРАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА

1°. Определение второй квадратичной формы

Основным объектом наших рассмотрений в этом параграфе будет C^2 -регулярная поверхность S , заданная радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{D}.$$

В каждой точке такой поверхности помимо единичного вектора нормали

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (1)$$

определен и второй дифференциал радиус-вектора

$$d^2\mathbf{r} = \mathbf{r}_{uu} du^2 + 2\mathbf{r}_{uv} du dv + \mathbf{r}_{vv} dv^2 + \mathbf{r}_u d^2u + \mathbf{r}_v d^2v. \quad (2)$$

Второй квадратичной формой поверхности S называется скалярное произведение векторов $d^2\mathbf{r}$ и \mathbf{n} :

$$\Pi = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) du^2 + 2(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) du dv + (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) dv^2. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что в каждой точке поверхности S форма (3) является квадратичной формой относительно дифференциалов du и dv .

Для коэффициентов второй квадратичной формы приняты обозначения

$$L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}), \quad M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}), \quad N = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}), \quad (4)$$

что позволяет записать ее в следующем виде:

$$\Pi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2. \quad (5)$$

Укажем еще несколько способов вычисления коэффициентов L , M и N второй квадратичной формы поверхности.

Заменяя в формулах (4) единичный вектор нормали \mathbf{n} его выражением (1), получим, что

$$L = \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (6)$$

(здесь использовано тождество

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

Так как векторы $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ и \mathbf{n} ортогональны (первый лежит в касательной плоскости поверхности, а второй — вектор нормали) —

$$(d\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0,$$

то

$$d(d\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0.$$

Отсюда вытекает равенство

$$(d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -(d\mathbf{r}, d\mathbf{n}), \quad (7)$$

которое дает еще один способ представления второй квадратичной формы:

$$\Pi = -(d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = -(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u) du^2 - ((\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v) + (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u)) du dv - (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v) dv^2. \quad (8)$$

Отсюда же можно получить новые формулы для вычисления коэффициентов L , M и N . Впрочем, удобнее продифференцировать по u и по v очевидные равенства

$$(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}) = 0.$$

Воспользовавшись соотношениями (4), получаем, что

$$\begin{aligned} L &= -(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u), \quad N = -(\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v), \\ M &= -(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v) = -(\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u). \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем, что вторая квадратичная форма является весьма эффективным средством исследования геометрических свойств регулярной поверхности.

2°. Классификация точек регулярной поверхности

Пусть S — регулярная поверхность и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — ее радиус-вектор.

Выберем на поверхности S некоторую точку $X_0 = X(u_0, v_0)$ и рассмотрим плоскость π_0 , которая касается поверхности S в этой точке.

Отклонение произвольной точки X поверхности S от плоскости π_0 определим формулой

$$h = (\mathbf{r}(X) - \mathbf{r}(X_0), \mathbf{n}_0), \quad (10)$$

где \mathbf{n}_0 — единичный вектор нормали к поверхности в точке X_0 . Это отклонение, взятое по абсолютной величине, равно расстоянию от точки X до плоскости π_0 . Отклонение положительно, если точка X и конец вектора \mathbf{n}_0 лежат по одну сторону от плоскости π_0 , и отрицательно, если эти точки лежат по разные стороны от плоскости π_0 (рис. 23).

Обратимся к формуле (10).

Разность $\mathbf{r}(X) - \mathbf{r}(X_0)$ допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(X) - \mathbf{r}(X_0) &= \mathbf{r}_u(X_0)(u - u_0) + \mathbf{r}_v(X_0)(v - v_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \{ \mathbf{r}_{uu}(X_0)(u - u_0)^2 + 2\mathbf{r}_{uv}(X_0)(u - u_0)(v - v_0) + \mathbf{r}_{vv}(X_0)(v - v_0)^2 \} + o(\rho^2), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\frac{o(\rho^2)}{\rho^2} \rightarrow 0$$

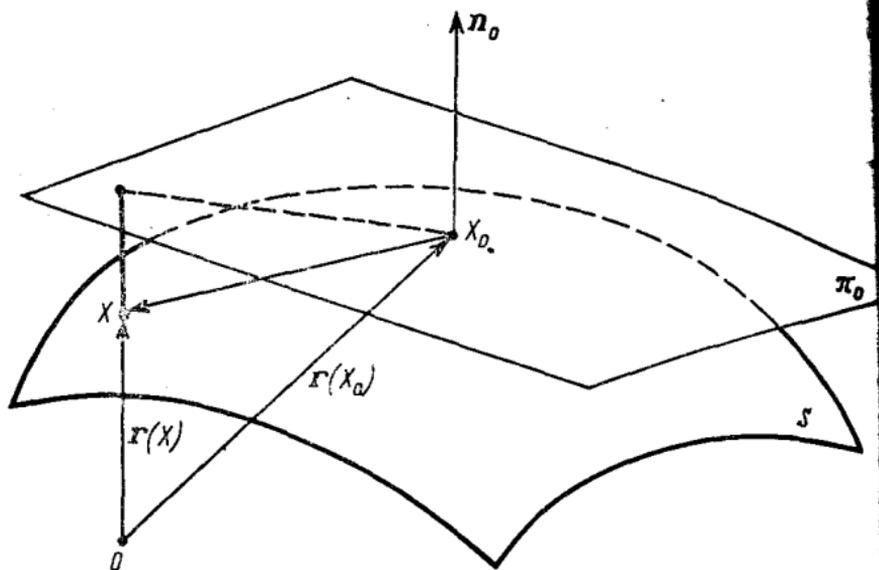


Рис. 23. Отклонение точки X от плоскости π_0 отрицательно

при

$$\rho = \sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} \rightarrow 0.$$

Умножим обе части равенства (11) скалярно на v . Тогда, положив

$$du = u - u_0, \quad dv = v - v_0,$$

получим, что

$$h = \frac{1}{2} (L_0 du^2 + 2M_0 du dv + N_0 dv^2) + o(\rho^2).$$

Отметим, что коэффициенты $L_0 = L(X_0)$, $M_0 = M(X_0)$, $N_0 = N(X_0)$ в формуле (12) вычислены в точке X_0 .

Таким образом, мы получили для отклонения h следующее представление:

$$h = \frac{1}{2} \Pi_0 + o(\rho^2),$$

где через Π_0 обозначена вторая квадратичная форма поверхности, вычисленная в точке X_0 , и $o(\rho^2)/\rho^2 \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$.

Используем полученную формулу (13) для изучения поверхности S вблизи точки X_0 .

Как известно из курса линейной алгебры, свойства квадратичной формы во многом определяются знаком ее дискриминанта.

Вычислим дискриминант второй квадратичной формы

$$L_0 N_0 - M_0^2 = L(X_0) N(X_0) - M^2(X_0)$$

в точке X_0 . Возможны следующие случаи.

1°. $L_0 N_0 - M_0^2 > 0$ — вторая квадратичная форма поверхности в точке X_0 является знакоопределенной.

Зафиксируем в точке X_0 некоторое направление на поверхности; для определенности ($du : 0$).

Тогда любое другое направление на поверхности в точке X_0 можно задавать при помощи угла φ , который оно образует с выбранным направлением ($du : 0$) (рис. 24).

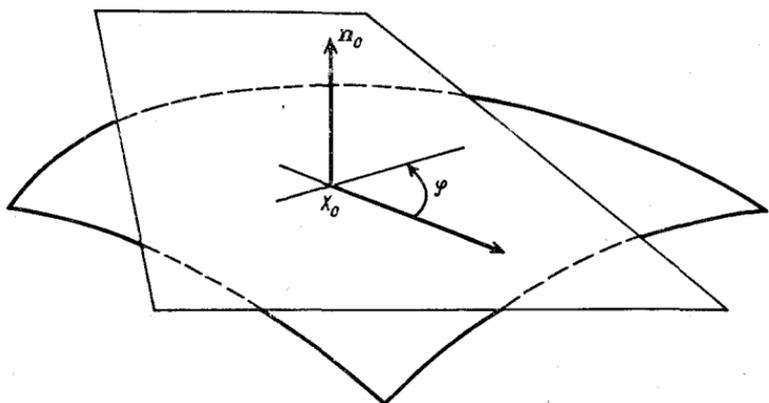


Рис. 24. Угол φ отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть со стороны вектора нормали

Положим

$$du = \rho \cos \varphi, \quad dv = \rho \sin \varphi.$$

Тогда

$$\Pi_0 = (L_0 \cos^2 \varphi + 2M_0 \cos \varphi \sin \varphi + N_0 \sin^2 \varphi) \rho^2. \quad (14)$$

Нетрудно показать, что

$$|L_0 \cos^2 \varphi + 2M_0 \cos \varphi \sin \varphi + N_0 \sin^2 \varphi| \geq a_0,$$

где постоянная

$$a_0 = \frac{1}{2} |L_0 + N_0| - \sqrt{\frac{1}{4} (L_0 + N_0)^2 - (L_0 N_0 - M_0^2)}$$

и в силу условия $L_0 N_0 - M_0^2 > 0$ положительна.

Таким образом, неравенство

$$|\Pi_0| \geq a_0 \rho^2$$

выполняется независимо от выбора угла φ .

Так как порядок стремления к нулю при $\rho \rightarrow 0$ второго слагаемого $o(\rho^2)$ в правой части формулы (13) выше двух, то из последней оценки можно сделать следующий вывод.

Отклонение h сохраняет знак (совпадающий со знаком второй квадратичной формы Π_0) для всех достаточно малых значений ρ независимо от выбора направления на поверхности.

Это означает, что все точки поверхности S , достаточно близкие к точке X_0 , располагаются по одну сторону от касательной плоскости π_0 поверхности S в этой точке. Такая точка поверхности называется *эллиптической* (рис. 25).

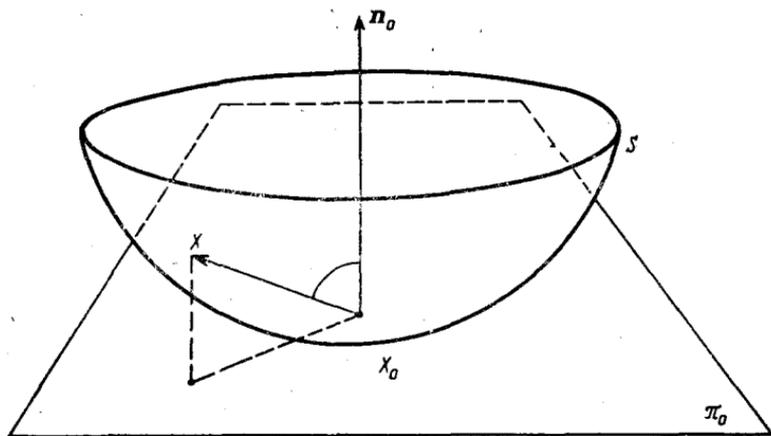


Рис. 25. На рисунке изображена эллиптическая точка поверхности S

2+. $L_0 N_0 - M_0^2 < 0$ — вторая квадратичная форма поверхности в точке X_0 является знакопеременной.

Покажем, что в этом случае в точке X_0 можно указать два неколлинеарных направления на поверхности, обладающих следующими свойствами:

а) для значений дифференциалов, определяющих эти направления, вторая квадратичная форма поверхности, вычисленная в точке X_0 , обращается в нуль;

б) все остальные направления на поверхности в точке X_0 разбиваются на два класса — для дифференциалов, определяющих направления одного из этих классов, вторая квадратичная форма Π_0 положительна и для другого отрицательна.

Пусть некоторое направление $(du : dv)$ положительного класса задается углом φ . В соответствии с формулой (14) имеем

$$\Pi_0 = a(\varphi) \rho^2 > 0,$$

где

$$a(\varphi) = L_0 \cos^2 \varphi + 2M_0 \cos \varphi \sin \varphi + N_0 \sin^2 \varphi.$$

Как видно из формулы (13), знак отклонения h для всех достаточно малых значений ρ в рассматриваемом направлении φ совпадает со знаком второй квадратичной формы Π_0 . Следовательно, если точка X поверхности S достаточно близка к точке X_0 , то это отклонение положительно.

Рассуждая аналогично, можно указать точки на поверхности, близкие к точке X_0 , для которых отклонение h отрицательно (рис. 26).

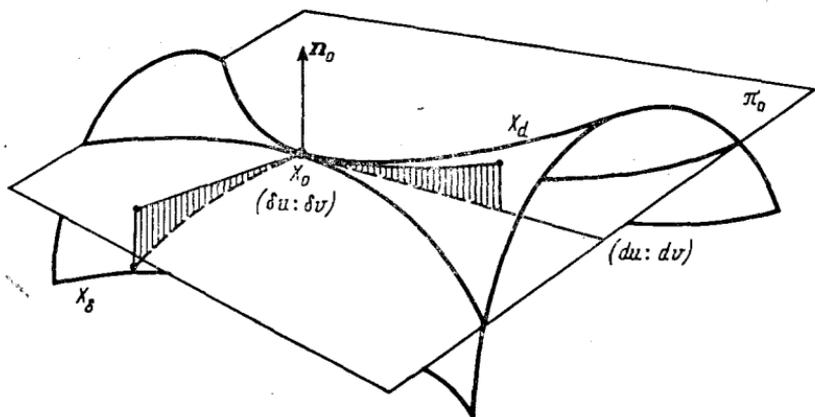


Рис. 26. Отклонение точки X_d в направлении $(du:dv)$ положительно, отклонение точки X_b в направлении $(\delta u:\delta v)$ отрицательно

Приведенные рассуждения показывают, что вблизи точки X_0 поверхность S располагается по разные стороны от касательной плоскости π_0 . При этом проекции точек поверхности, отклонения которых положительны, на касательной плоскости π_0 заполняют множество, отмеченное на приведенном рисунке (рис. 27).

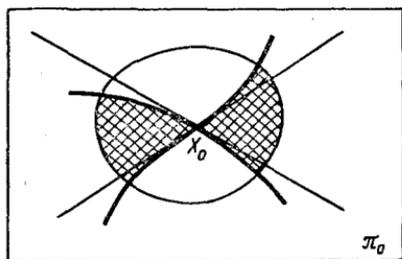


Рис. 27. Прямые указывают направления в точке X_0 , в которых $\Pi_0=0$

В рассматриваемом случае точка X_0 называется *гиперболической* точкой поверхности S .

3^+ . $L_0 N_0 - M_0^2 = 0$, но отличен от нуля хотя бы один из коэффициентов L_0, N_0 .

Пусть для определенности $L_0 \neq 0$. Тогда вторая квадратичная форма поверхности S в точке X_0 может быть записана в следующем виде:

$$\Pi_0 = L_0 (du + \alpha dv)^2.$$

Тем самым в зависимости от знака L_0 форма Π_0 либо неотрицательна ($L_0 > 0$) либо неположительна ($L_0 < 0$). При этом на поверхности S в точке X_0 можно указать направление $(du : dv) = (\alpha : -1)$, такое, что определяющие его дифференциалы du и dv обращают вторую квадратичную форму Π_0 в нуль; для всех других направлений на поверхности в точке X_0 форма Π_0 имеет один и тот же знак (совпадающий со знаком L_0) (рис. 28).

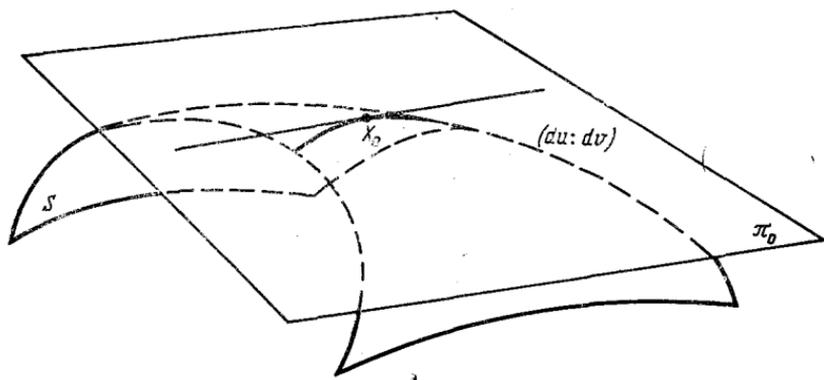


Рис. 28. Все точки поверхности S кроме (возможно) линии, проходящей через точку X_0 в направлении $(du:dv)$, лежат под касательной плоскостью π_0 .

В этом случае точка X_0 называется *параболической* точкой поверхности S .

$$4^+. L_0 = M_0 = N_0 = 0.$$

Такая точка X_0 называется точкой *уплощения* поверхности. Расположение точек поверхности, близких к точке уплощения, относительно касательной плоскости поверхности в этой точке может быть чрезвычайно разнообразным (рис. 29).

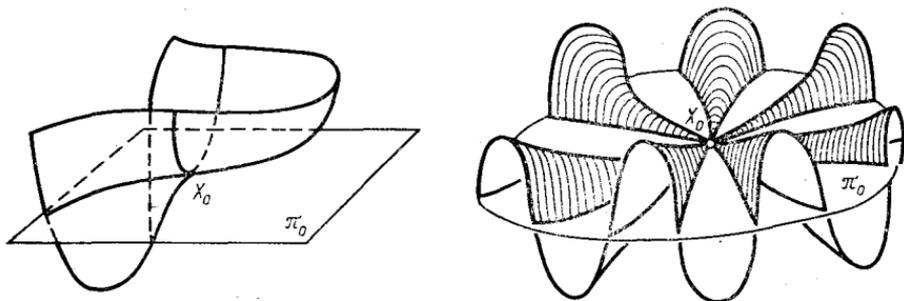


Рис. 29. На рисунках приведены примеры точек уплощения (π_0 — касательная плоскость поверхности в точке уплощения X_0)

3°. Кривизна кривой на поверхности

Рассмотрим на поверхности S произвольную C^2 -регулярную кривую \mathcal{L} , проходящую через точку $X=X(u, v)$ в направлении $(du : dv)$ (рис. 30).

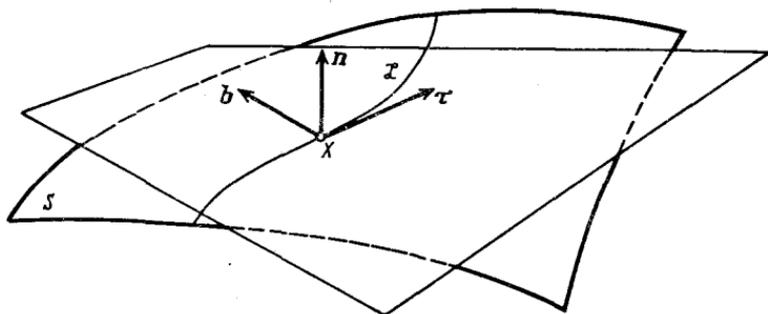


Рис. 30. Плоскость π касается поверхности S в точке X ; кривая \mathcal{L} лежит на поверхности S

Пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$$

— естественная параметризация кривой \mathcal{L} . Вычислим в точке $X(u, v)$ три вектора:

единичный вектор касательной к кривой — $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$;

единичный вектор нормали к поверхности — \mathbf{n} и $\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}$.

Тройка векторов $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} , \mathbf{b} линейно независима. Это позволяет представить вектор

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

в виде их линейной комбинации

$$\mathbf{r}'' = \alpha\boldsymbol{\tau} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b}.$$

Так как $(\mathbf{r}', \mathbf{r}') = 1$, то

$$\alpha = (\mathbf{r}'', \boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\mathbf{r}', \mathbf{r}') = 0.$$

Коэффициенты $\beta = (\mathbf{r}'', \mathbf{n})$ и $\gamma = (\mathbf{r}'', \mathbf{b})$ имеют специальные названия:

$k_n = (\mathbf{r}'', \mathbf{n})$ — нормальная кривизна кривой \mathcal{L} ,

$k_g = (\mathbf{r}'', \mathbf{b})$ — геодезическая кривизна кривой \mathcal{L} .

Если кривизна $k_1 = |\mathbf{r}''|$ кривой \mathcal{L} отлична от нуля, то для кривой \mathcal{L} определен единичный вектор главной нормали — \mathbf{v} . При этом $\mathbf{r}'' = k_1 \mathbf{v}$ (рис. 31).

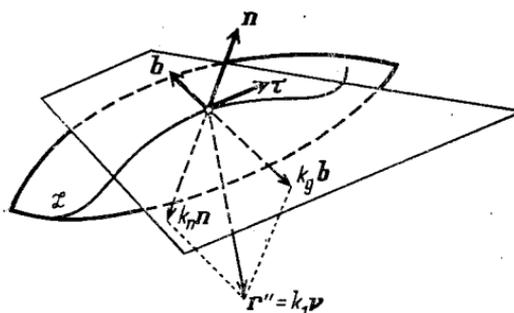


Рис. 31. Вторая производная \mathbf{r}'' радиус-вектора кривой является линейной комбинацией векторов \mathbf{b} и \mathbf{n}

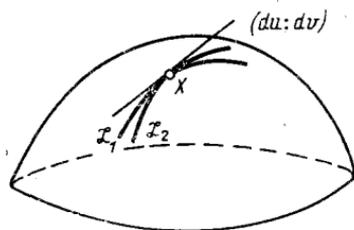


Рис. 32. Кривые \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 на поверхности S в точке X имеют одно и то же направление $(du:dv)$

Отсюда вытекает, что

$$k_n = k_1(\mathbf{v}, \mathbf{n}), \quad k_g = k_1(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}).$$

Обозначим через Θ угол между вектором главной нормали \mathbf{v} кривой \mathcal{L} и единичным вектором нормали \mathbf{n} к поверхности S . Тогда справедливо равенство

$$k_n = (\mathbf{r}'', \mathbf{n}) = k_1 \cos \Theta. \quad (15)$$

Покажем, что для всех кривых, проходящих по поверхности S через точку $X(u, v)$ в заданном направлении $(du:dv)$ (т. е. имеющих одну и ту же касательную), произведение $k_1 \cos \Theta$ принимает одно и то же значение (рис. 32—33).

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \mathbf{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \mathbf{r}_u \frac{d^2 u}{ds^2} + \mathbf{r}_v \frac{d^2 v}{ds^2}.$$

Умножая обе части этой формулы на единичный вектор нормали \mathbf{n} скалярно, с учетом равенства (15) получим, что

$$k_n = k_1 \cos \Theta = L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2.$$

Так как в точке $X(u, v)$ кривой \mathcal{L}

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

то из предыдущего равенства вытекает формула

$$k_n = k_1 \cos \Theta = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Подчеркнем, что все функции E, F, G, L, M, N вычислены в точке $X(u, v)$.

Выражение в правой части последней формулы зависит только от отношения du к dv , т. е. только от направления кривой \mathcal{L} в точке $X(u, v)$.

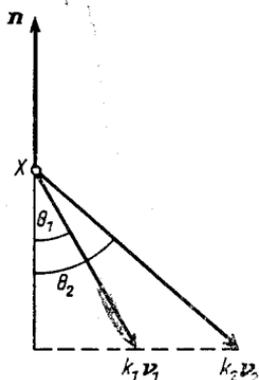


Рис. 33. $k_1 \cos \theta_1 = k_2 \cos \theta_2$. Векторы $n, k_1 v_1$ и $k_2 v_2$ расположены в плоскости, проходящей через точку X перпендикулярно заданному направлению

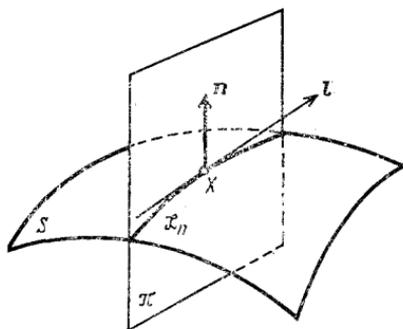


Рис. 34. \mathcal{L}_n — нормальное сечение поверхности S в точке X в направлении l

Проведем через точку $X(u, v)$ плоскость π параллельно вектору нормали $n(u, v)$ к поверхности и данному направлению $l = (du : dv)$. Кривая \mathcal{L}_n , которая получается при пересечении поверхности S с плоскостью π , называется *нормальным сечением* поверхности S в точке $X(u, v)$ в заданном направлении $l = (du : dv)$ (рис. 34).

Полученный выше результат можно сформулировать в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2 (Менье)*. Пусть через точку $X(u, v)$ поверхности S в заданном направлении $l = (du : dv)$ проведена плоскость π' . Тогда проекция центра кривизны нормального сечения \mathcal{L}_n на плоскость π' совпадает с центром кривизны наклонного сечения $\mathcal{L}' = S \cap \pi'$.

Для нормального сечения \mathcal{L}_n угол $\Theta = 0$ и формула (15) принимает следующий вид:

$$k_1 = k_n.$$

Полученное равенство означает, что величина k_n равна кривизне нормального сечения поверхности S в направлении $l = (du : dv)$.

* Менье де ла Плас (Meusnier de la Place) Жан Батист Мари Шарль (19.6.1754—17.6.1793) — французский математик.

Проведенные рассуждения дают основание назвать величину k_n *нормальной кривизной* поверхности S в данной точке X и в данном направлении l :

$$k_n = k_n(X, l).$$

Если направление в точке поверхности задано, то нормальная кривизна k_n в этом направлении $(du : dv)$ может быть вычислена по формуле

$$k_n = \frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (16)$$

4°. Индикатриса Дюпена*

Зафиксируем на регулярной поверхности S , заданной радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, произвольную точку $X(u, v)$. Пусть k_l — нормальная кривизна поверхности в этой точке в некотором направлении l .

Построим в точке $X(u, v)$ касательную плоскость π поверхности S и отложим в этой плоскости от точки X в направлении l отрезок длины

$$\frac{1}{\sqrt{|k_l|}}.$$

Множество концов этих отрезков называется *индикатрисой Дюпена* поверхности S в точке X .

Выясним, что представляет собой индикатриса Дюпена.

Введем на касательной плоскости прямолинейные координаты, приняв точку X за начало координат, а векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v — за базисные векторы координатных осей ξ и η соответственно.

Пусть ξ, η — координаты одной из точек индикатрисы Дюпена, отвечающей некоторому направлению $l = (du : dv)$. Тогда

$$\xi \mathbf{r}_u + \eta \mathbf{r}_v = \frac{1}{\sqrt{|k_l|}} \cdot \frac{\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv}{|\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv|}. \quad (17)$$

Ясно, что

$$\xi : \eta = du : dv.$$

Поэтому из формулы (16) для нормальной кривизны вытекает, что

$$k_l = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}.$$

* Дюпен (Dupin) Пьер Шарль Франсуа (6.10.1784—18.1.1873) — французский математик.

Возводя обе части равенства (17) в квадрат, получим, что

$$E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = \frac{1}{|k_l|}.$$

Из сравнения последних двух соотношений заключаем, что

$$|L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2| = 1.$$

Таким образом, индикатриса Дюпена представляет собой:
 эллипс — в эллиптической точке ($LN - M^2 > 0$),
 пару сопряженных гипербол — в гиперболической точке ($LN - M^2 < 0$),
 пару параллельных прямых — в параболической точке ($LN - M^2 = 0, L^2 + N^2 \neq 0$) (рис. 35).

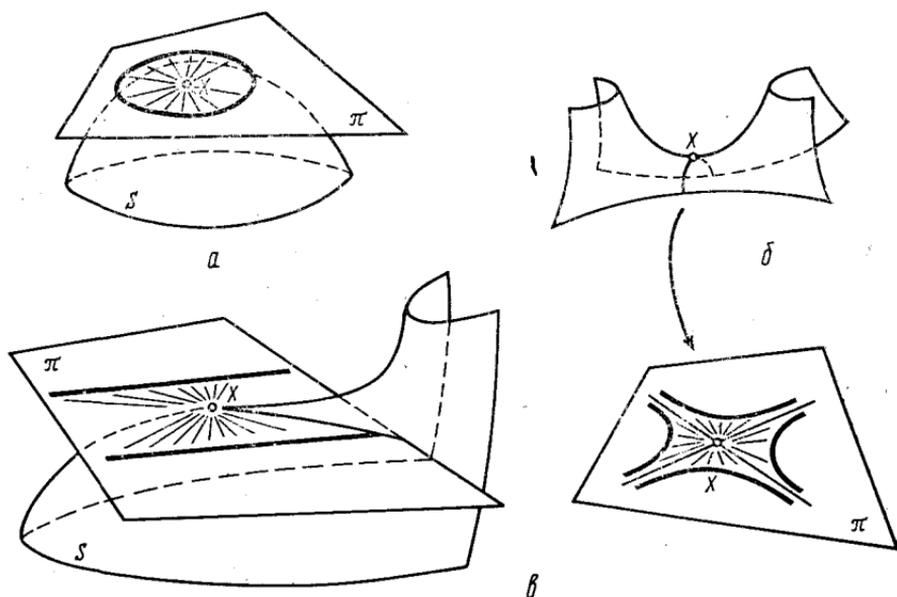


Рис. 35. Индикатриса Дюпена в эллиптической (а), гиперболической (б) и параболической (в) точках

5°. Главные кривизны

Как видно из формулы (16), нормальная кривизна поверхности в данной точке зависит от выбора направления на поверхности.

Направление на поверхности называется *главным*, если нормальная кривизна в этом направлении достигает экстремального значения.

Покажем, что в каждой точке S^2 -регулярной поверхности найдется не менее двух различных главных направлений.

Пусть $(\xi : \eta)$ — произвольное направление в точке X на поверхности S . Тогда

$$k_n = k(\xi, \eta) = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2} \quad (18)$$

— дифференцируемая функция переменных ξ и η . Отметим, что функции E, F, G, L, M, N определяются только выбором точки X и от переменных ξ и η не зависят.

Полагая

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \varphi,$$

получим, что

$$k_n = k_n(\varphi) = \frac{L \cos^2 \varphi + 2M \cos \varphi \sin \varphi + N \sin^2 \varphi}{E \cos^2 \varphi + 2F \cos \varphi \sin \varphi + G \sin^2 \varphi}.$$

Так как функция $k_n = k_n(\varphi)$ непрерывна и $k_n(0) = k_n(2\pi)$, то на отрезке $[0, 2\pi]$ она либо постоянна, либо имеет хотя бы один максимум и хотя бы один минимум. Это и означает, что в каждой точке C^2 -регулярной поверхности есть два различных главных направления.

Экстремальные значения нормальных кривизн в главных направлениях называются *главными кривизнами* поверхности в данной точке (рис. 36).

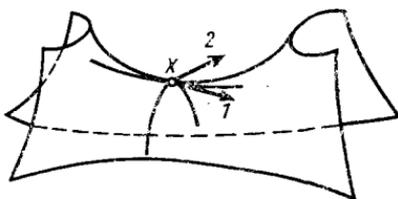


Рис. 36. Указаны главные направления в точке X

Укажем способ вычисления главных направлений и главных кривизн в данной точке регулярной поверхности.

Из формулы (18) для $k_n = k(\xi, \eta)$ вытекает тождество относительно переменных ξ и η :

$$(L - kE)\xi^2 + 2(M - kF)\xi\eta + (N - kG)\eta^2 = 0. \quad (19)$$

Продифференцируем это тождество по ξ . Учитывая, что производная нормальной кривизны в главном направлении обращается в нуль, получим для главного направления $(\xi : \eta)$

$$(L - kE)\xi + (M - kF)\eta = 0. \quad (20)$$

Дифференцируя тождество (19) по η и рассуждая аналогично, получаем

$$(M - kF)\xi + (N - kG)\eta = 0. \quad (21)$$

Здесь k — главная кривизна в направлении $(\xi : \eta)$.

Будем рассматривать полученные соотношения (20) — (21) как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных ξ и η . Эта система имеет ненулевые решения, так как в данной точке регулярной поверхности всегда есть главные направления.

Из этого вытекает, что

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получим квадратное уравнение для искомой функции k :

$$k^2(EG - F^2) - k(EN - 2FM + GL) + LN - M^2 = 0. \quad (22)$$

Проведенные выше рассуждения позволяют утверждать, что уравнение (22) имеет вещественные корни k_1 и k_2 , которые и являются главными кривизнами. Эти корни либо различны, $k_1 \neq k_2$, либо совпадают, $k_1 = k_2$.

Рассмотрим оба случая.

1⁺. Уравнение (22) имеет два различных корня k_1 и k_2 .

Этим корням отвечают на поверхности два различных главных направления $(\xi_1 : \eta_1)$ и $(\xi_2 : \eta_2)$, определяемых из систем

$$\begin{aligned} (L - k_i E)\xi_i + (M - k_i F)\eta_i &= 0, \\ (M - k_i F)\xi_i + (N - k_i G)\eta_i &= 0. \end{aligned} \quad (i=1, 2) \quad (23)$$

Покажем, что если направления координатных линий на поверхности в некоторой точке совпадают с главными направлениями, то в этой точке коэффициенты F и M обращаются в нуль.

Пусть направления координатных линий $-(\xi_1 : 0)$ и $(0 : \eta_1)$ — главные. Тогда из системы (23) вытекает, что

$$\begin{aligned} L - k_1 E &= 0, & \underline{M - k_1 F} &= 0, \\ \underline{M - k_2 F} &= 0, & N - k_2 G &= 0. \end{aligned}$$

Из второго и третьего равенств вследствие того, что $k_1 \neq k_2$, заключаем:

$$F = M = 0.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае кривизны k_1 и k_2 можно найти из следующих формул:

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}.$$

2⁺. Уравнение (22) имеет совпадающие корни: $k_1 = k_2 = k$.

Покажем, что в этом случае каждое направление на поверхности в данной точке является главным.

Так как в точке регулярной поверхности всегда есть два различных главных направления, то система (20) — (21) должна иметь два линейно независимых решения. Это возможно лишь при выполнении равенств

$$L - kE = 0, \quad M - kF = 0, \quad N - kG = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$L = kE, \quad M = kF, \quad N = kG$$

и, следовательно,

$$k_n = k$$

(см. формулу (18)).

Тем самым нормальная кривизна поверхности в данной точке постоянна (не зависит от направления) и, значит, каждое направление является главным. *

Точками на поверхности, для которых каждое направление является главным, могут быть либо *точки уплощения* ($k=0$ — нормальная кривизна поверхности в каждом направлении в такой точке равна нулю), либо эллиптические точки ($k>0$), называемые в данном случае *точками округления* или *омбилическими точками*.

Пример. Все точки плоскости являются точками уплощения, все точки сферы являются точками округления.

Из соотношения $M = Fk$ видно, что если координатные линии на поверхности в данной точке ортогональны ($F=0$), то и $M=0$.

Подведем некоторые итоги.

В каждой точке регулярной поверхности имеются взаимно ортогональные главные направления.

Если направления координатных линий на поверхности совпадают с главными направлениями, то

$$F = M = 0.$$

Верно и обратное: если $F = M = 0$, то, как следует из формулы (18), координатные линии u и v имеют главные направления.

6°. Линии кривизны

Кривая на поверхности, направление которой в каждой точке совпадает с главным направлением на поверхности в этой точке, называется *линией кривизны*.

Для того чтобы дифференциалы du и dv определяли главное направление ($du : dv$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$(L - kE) du + (M - kF) dv = 0,$$

$$(M - kF) du + (N - kG) dv = 0,$$

где k — кривизна нормального сечения в направлении ($du : dv$).

Исключая k , получим, что

$$(LF - ME) du^2 + (LG - NE) dudv + (MG - NF) dv^2 = 0. \quad (24)$$

Формула (24) также дает необходимое и достаточное условие того, чтобы направление $(du : dv)$ было главным.

Запишем ее в более симметричной форме:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Равенство (25) можно рассматривать как дифференциальное уравнение линий кривизны.

Покажем, что в окрестности каждой точки X , не являющейся точкой уплощения или точкой округления, поверхность можно параметризовать так, что координатные линии будут линиями кривизны.

Запишем дифференциальное уравнение линий кривизны коротко так:

$$Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 = 0. \quad (*)$$

Так как все достаточно близкие к точке X точки поверхности также имеют ровно два главных направления, то квадратный трехчлен

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2$$

в каждой из них будет иметь два вещественных корня, что возможно лишь в случае, если

$$AC - B^2 < 0.$$

Это позволяет записать уравнение (*) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$Adu + (B + \sqrt{B^2 - AC}) dv = 0,$$

$$Adu + (B - \sqrt{B^2 - AC}) dv = 0. \quad (**)$$

Интегральные кривые системы (**) являются искомыми координатными линиями на поверхности, т. е. линиями кривизны.

7°. Формула Родрига*

Пусть u и v — криволинейные координаты в окрестности точки X на поверхности S . Так как производные \mathbf{p}_u и \mathbf{p}_v единичного вектора нормали \mathbf{p} к поверхности S в точке X параллельны касательной плоскости π_X (дифференцируя равенство $\mathbf{p}^2 = 1$, убежда-

* Родриг (Rodrigues) Бенжамен Олинде (16.10.1794—26.12.1851) — французский математик.

емся в том, что $(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u) = (\mathbf{n}, \mathbf{n}_v) = 0$, то их можно представить в виде линейной комбинации только векторов \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v :

$$\dot{\mathbf{n}}_u = \alpha \mathbf{r}_u + \beta \mathbf{r}_v, \quad \dot{\mathbf{n}}_v = \gamma \mathbf{r}_u + \delta \mathbf{r}_v. \quad (26)$$

Умножая оба равенства (26) скалярно на векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v с учетом формул (9) пункта 1°, получим соответственно

$$-L = \alpha E + \beta F, \quad -M = \gamma E + \delta F,$$

$$-M = \alpha F + \beta G, \quad -N = \gamma F + \delta G.$$

Как показано в предыдущем пункте, координатные линии на поверхности всегда можно выбрать так, чтобы в точке X они имели главные направления. Тем самым $F = M = 0$ и, значит,

$$\alpha = -\frac{L}{E}, \quad \beta = \gamma = 0, \quad \delta = -\frac{N}{G}. \quad (27)$$

Заметим, что нормальные кривизны поверхности в точке X в направлениях координатных линий u и v соответственно равны

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}. \quad (28)$$

Сравнивая формулы (26), (27) и (28), окончательно получим, что

$$\mathbf{n}_u = -k_1 \mathbf{r}_u, \quad \mathbf{n}_v = -k_2 \mathbf{r}_v.$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3 (Родриг). Производные единичного вектора нормали и радиус-вектора поверхности в главном направлении коллинеарны; коэффициент пропорциональности только знаком отличается от нормальной кривизны поверхности в этом направлении (рис. 37).

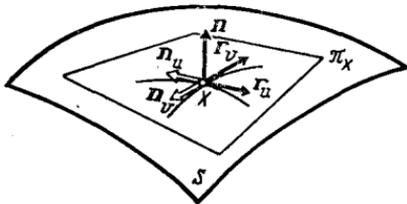


Рис. 37. Производные радиус-вектора \mathbf{r} и единичного вектора \mathbf{n} нормали поверхности в главных направлениях коллинеарны

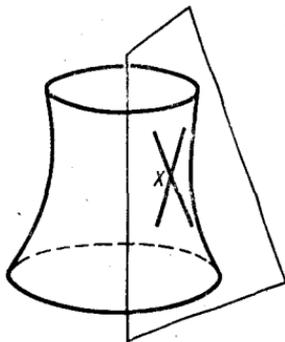


Рис. 38. Указаны асимптотические направления на поверхности в точке X

Справедливо и обратное утверждение:
если

$$n_u = \lambda_1 r_u, \quad n_v = \lambda_2 r_v,$$

то направления линий u и v являются главными и $\lambda_1 = -k_1$, $\lambda_2 = -k_2$.

8°. Асимптотические направления

Направление на регулярной поверхности называется *асимптотическим*, если нормальная кривизна поверхности в этом направлении обращается в нуль (рис. 38).

Из формулы (16) пункта 3° видно, что обращение в нуль второй квадратичной формы в направлении $(\xi : \eta)$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы это направление было асимптотическим:

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = 0.$$

Поэтому в эллиптической точке поверхности нет асимптотических направлений, в гиперболической точке существует ровно два асимптотических направления, в параболической точке — одно асимптотическое направление; любое направление в точке уплощения является асимптотическим.

9°. Асимптотические линии

Кривая на поверхности называется *асимптотической линией*, если в каждой своей точке она имеет асимптотическое направление.

Пусть $(du : dv)$ — направление кривой \mathcal{L} на поверхности S в ее текущей точке $X(u, v)$.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы рассматриваемая кривая \mathcal{L} была асимптотической линией, является равенство

$$L(u, v) du^2 + 2M(u, v) dudv + N(u, v) dv^2 = 0.$$

Отсюда следует, что соотношение

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0 \tag{29}$$

является дифференциальным уравнением асимптотических линий.

Покажем, что в окрестности гиперболической точки поверхности всегда можно ввести параметризацию, при которой координатные линии являются асимптотическими линиями.

Вследствие того что в гиперболической точке выполняется условие $LN - M^2 < 0$, уравнение (29) можно свести к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка, интегральными линиями которой и будут искомые координатные линии, т. е. асимптотические.

Выясним, какой вид принимает вторая квадратичная форма в точке, координатные линии в которой имеют асимптотические направления.

Из того, что направления $(du:0)$ и $(0:dv)$ асимптотические, вытекает, что $L=N=0$. Поэтому

$$II = 2Mdudv.$$

Свойства асимптотических линий.

1+. Если на поверхности расположена прямая, то она непременно является асимптотической линией.

* Это вытекает из того факта, что нормальное сечение поверхности в направлении, задаваемом этой прямой, совпадает с ней самой. *

2+. Касательная плоскость поверхности в каждой точке асимптотической линии является ее соприкасающейся плоскостью.

* Возможны два случая.

а) Кривизна асимптотической линии \mathcal{L} в точке X отлична от нуля.

Тогда касательная плоскость π_X поверхности в этой точке параллельна векторам $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}^2$ (последнему в силу равенства

$$(d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0).$$

б) Если кривизна кривой \mathcal{L} в точке X равна нулю, то указанное свойство остается справедливым вследствие того, что в этом случае всякая плоскость, содержащая касательную к кривой \mathcal{L} (а значит, и касательная плоскость π_X), является соприкасающейся плоскостью кривой \mathcal{L} . *

10°. Формула Эйлера *

Возьмем на регулярной поверхности S произвольную точку X . Без потери общности можно считать, что координатные линии в точке X на поверхности S имеют главные направления и ортогональны. Это означает, что в точке X первая и вторая квадратичные формы поверхности S задаются формулами

$$I = Edu^2 + Gdv^2, \quad II = Ldu^2 + Ndv^2,$$

а главные кривизны k_1 и k_2 поверхности S в этой точке вычисляются так:

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}.$$

В рассматриваемом случае формула для нормальной кривизны $k_n = k(\xi, \eta)$ поверхности в направлении $(\xi:\eta)$ принимает следующий вид:

$$k(\xi, \eta) = \frac{k_1 E \xi^2 + k_2 G \eta^2}{E \xi^2 + G \eta^2}.$$

* Эйлер (Euler) Леонард (15.4.1707—18.9.1783) — швейцарский математик.

Обозначим через φ угол, который направление $(\xi : \eta)$ образует с направлением $(\xi : 0)$ координатной линии u . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{E} \xi}{\sqrt{E\xi^2 + G\eta^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{G} \eta}{\sqrt{E\xi^2 + G\eta^2}}.$$

Обозначая $k(\xi, \eta)$ через $k(\varphi)$, получим формулу Эйлера для нормальной кривизны поверхности в произвольном направлении φ :

$$k(\varphi) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi. \quad (30)$$

Из формулы Эйлера видно, что для вычисления нормальной кривизны поверхности в произвольном направлении достаточно знать ее главные кривизны в рассматриваемой точке.

11°. Средняя и гауссова кривизны

При изучении свойств регулярных поверхностей широко используются понятия средней кривизны поверхности и гауссовой кривизны.

Пусть k_1 и k_2 — главные кривизны регулярной поверхности в данной точке.

Средней кривизной H поверхности в данной точке называется полусумма ее главных кривизн

$$H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2). \quad (31)$$

Гауссовой кривизной K поверхности называется произведение ее главных кривизн

$$K = k_1 \cdot k_2. \quad (32)$$

Поскольку главные кривизны поверхности удовлетворяют соотношению

$$k^2(EG - F^2) - k(EN - 2FM + GL) + LN - M^2 = 0,$$

то, используя свойства корней квадратного уравнения, получаем для средней кривизны H и гауссовой кривизны K следующие формулы:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN - FM + GL}{EG - F^2}, \quad (33)$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (34)$$

Укажем некоторые свойства средней и гауссовой кривизн поверхности.

Из формулы Эйлера (30) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi) d\varphi = H$$

и

$$\frac{1}{2} \left(k(\varphi) + k\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right) = H$$

(соотношения в определенной степени оправдывают название H).

Из формулы (34) видно, что знак гауссовой кривизны K совпадает с дискриминантом второй квадратичной формы. Поэтому

$K > 0$ в эллиптических точках,

$K < 0$ в гиперболических точках,

$K = 0$ в параболических точках и в точках уплощения.

12°. Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, которую заметает плоская кривая при своем вращении вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой.

Рассмотрим на плоскости xOz кривую \mathcal{L} , заданную уравнениями (рис. 39)

$$x = \varphi(u), \quad z = \psi(u),$$

$$u_1 \leq u \leq u_2.$$

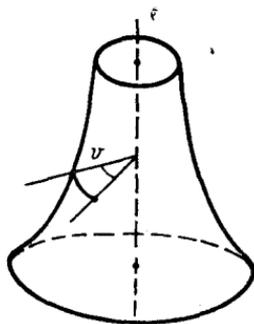
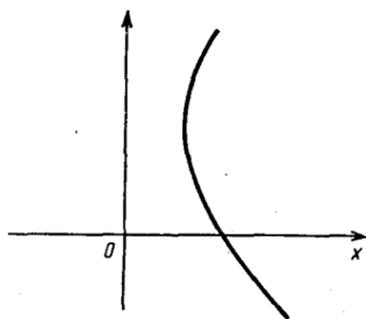


Рис. 39. Поверхность вращения

При вращении кривой \mathcal{L} вокруг оси Oz получаем поверхность вращения S . Линии пересечения поверхности вращения S с плоскостями, содержащими ось вращения Oz , называются *меридианами* поверхности вращения, а с плоскостями, ортогональными оси Oz , — *параллелями* (рис. 40).

Найдем уравнения поверхности вращения.

Точка $(\varphi(u), 0, \psi(u))$ кривой \mathcal{L} при повороте кривой на угол v переходит в точку

$$(\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u)).$$

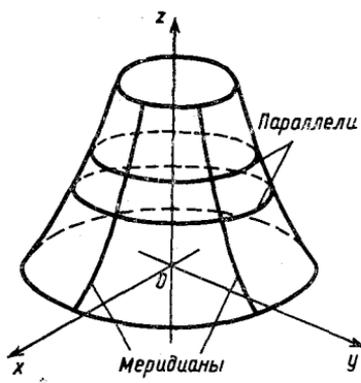


Рис. 40. Параллели и меридианы на поверхности вращения

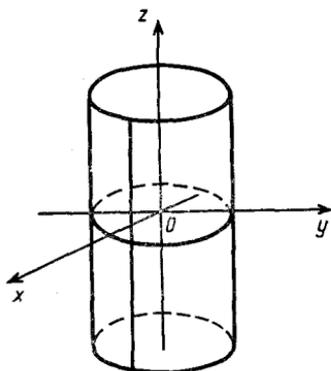


Рис. 41. Цилиндр — поверхность нулевой кривизны

Тем самым уравнения поверхности вращения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = \psi(u), \\ u_1 &\leq u \leq u_2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (35)$$

Линии $v = \text{const}$ — ее меридианы, а линии $u = \text{const}$ — параллели.

Первая и вторая квадратичные формы поверхности вращения равны соответственно

$$I = (\varphi'^2 + \psi'^2) du^2 + \varphi^2 dv^2, \quad (36)$$

$$II = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} du^2 + \frac{\psi'\varphi}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} dv^2. \quad (37)$$

Отметим, что параллели и меридианы поверхности вращения образуют ортогональную сеть

$$F = 0,$$

а так как

$$M = 0,$$

то параллели и меридианы являются линиями кривизны поверхности вращения.

Примеры регулярных поверхностей вращения постоянной гауссовой кривизны.

1. $K = 0$.

Вращением прямой

$$x=a, \quad z=u$$

вокруг параллельной ей оси Oz получаем цилиндрическую поверхность (рис. 41)

$$x=a \cos v, \quad y=a \sin v, \quad z=u.$$

Первая и вторая квадратичные формы этой поверхности соответственно равны

$$I=du^2 + dv^2, \quad II=adv^2.$$

Гауссова кривизна K цилиндрической поверхности равна нулю.
2. $K=\text{const}>0$.

Вращением полуокружности

$$x=R \cos u, \quad z=R \sin u,$$

$$|u| \leq \frac{\pi}{2}.$$

вокруг ее диаметра получаем сферу радиуса R (рис. 42):

$$x=R \cos u \cos v, \quad y=R \cos u \sin v, \quad z=R \sin u.$$

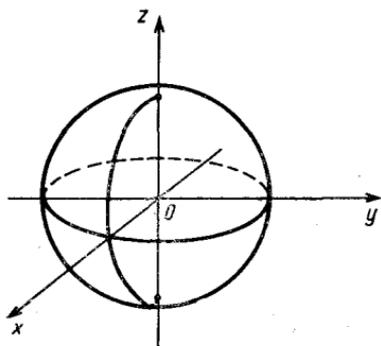


Рис. 42. Сфера — поверхность постоянной положительной кривизны

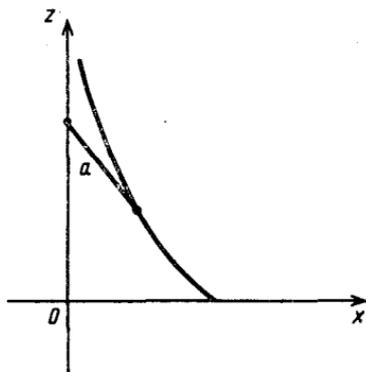


Рис. 43. Трактриса

Ее основные формы соответственно равны

$$I=R^2 du^2 + R^2 \cos^2 v dv^2,$$

$$II=\frac{1}{R}=R du^2 + R \cos^2 v dv^2.$$

Гауссова кривизна K сферы радиуса R :

$$K=\frac{1}{R^2}.$$

3. $K=\text{const}<0$.

Рассмотрим *трактрису* — плоскую кривую, отрезок касательной к которой между точкой касания и некоторой фиксированной прямой, лежащей в этой же плоскости, имеет постоянную длину (рис. 43).

Выбирая на плоскости xOz в качестве этой прямой ось Oz , получаем уравнения трактрисы

$$x = a \sin u, \quad z = a \left(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right),$$

$$\frac{\pi}{2} \leq u < \pi.$$

Исключив параметр u , приходим к явному уравнению

$$z = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

При вращении трактрисы вокруг оси Oz получаем поверхность вращения, называемую *псевдосферой* (рис. 44). Ее параметрические уравнения имеют следующий вид:

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \left(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right).$$

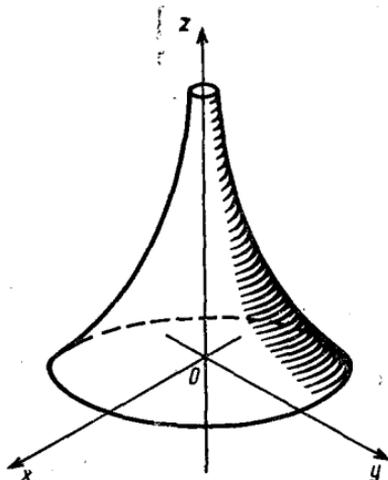


Рис. 44. Псевдосфера — поверхность постоянной отрицательной кривизны

Первая и вторая квадратичные формы псевдосферы равны соответственно

$$I = a^2 \left(3 + \frac{1}{\sin^2 u} \right) du^2 + a^2 \sin^2 u dv^2,$$

$$\Pi = a \frac{2 - \operatorname{tg}^2 u}{\sqrt{3 + \frac{1}{\sin^2 u}}} du^2 + a \frac{1 + \sin^2 u}{\sqrt{3 + \frac{1}{\sin^2 u}}} dv^2. \quad (38)$$

Гауссова кривизна K псевдосферы постоянна и равна:

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

§ 5. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В этом параграфе для регулярной поверхности будут получены формулы, являющиеся в известном смысле аналогом формул Френе в теории пространственных кривых.

Ранее было показано, как по заданной поверхности можно вычислять ее первую и вторую квадратичные формы. Здесь же мы попытаемся выяснить, в какой степени первая и вторая квадратичные формы определяют поверхность. Более точно — будут найдены условия на заданные квадратичные формы

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (1)$$

и

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2, \quad (2)$$

выполнение которых обеспечивает существование и единственность поверхности с первой квадратичной формой (1) и второй квадратичной формой (2).

1°. Дифференциальные формулы

Пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{D},$$

— радиус-вектор C^2 -регулярной поверхности S . В каждой точке такой поверхности векторы

$$\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

образуют линейно независимую систему. Поэтому любой вектор можно представить в виде их линейной комбинации. Это относится и к производным по u и v самих векторов \mathbf{r}_u , \mathbf{r}_v и \mathbf{n} (рис. 45).

Рассмотрим, в частности, разложения по векторам \mathbf{r}_u , \mathbf{r}_v и \mathbf{n} их производных

$$\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v.$$

Имеем

$$\mathbf{r}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_v + \lambda \mathbf{n},$$

$$\Gamma_{uv} = \Gamma_{12}^1 \Gamma_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_v + \mu \Pi, \quad (3)$$

$$\Gamma_{vv} = \Gamma_{22}^1 \Gamma_u + \Gamma_{22}^2 \Gamma_v + \nu \Pi$$

и

$$\Pi_u = \alpha_{11} \Gamma_u + \alpha_{12} \Gamma_v + \alpha_{13} \Pi, \quad (4)$$

$$\Pi_v = \alpha_{21} \Gamma_u + \alpha_{22} \Gamma_v + \alpha_{23} \Pi,$$

где Γ_{ij}^k , α_{ij} , λ , μ , ν — некоторые коэффициенты, подлежащие определению.

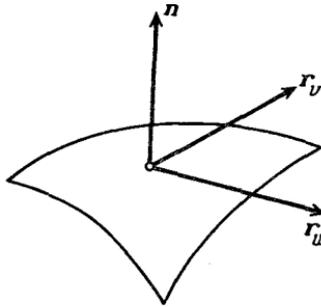


Рис. 45. В каждой точке регулярной поверхности тройка векторов r_u , r_v и n линейно независима

Покажем, что эти коэффициенты можно выразить через коэффициенты первой

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

и второй

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

квадратичных форм данной регулярной поверхности.

При выводе формул нам понадобятся соотношения, определяющие коэффициенты форм I и II через производные радиус-вектора. Напомним эти соотношения:

$$r_u^2 = E, (r_u, r_v) = F, r_v^2 = G; \quad (5)$$

$$(r_{uu}, n) = L, (r_{uv}, n) = M, (r_{vv}, n) = N, \quad (6)$$

$$-(r_u, n_u) = L, -(r_u, n_v) = -(r_v, n_u) = M, -(r_v, n_v) = N.$$

Начнем с вычисления коэффициентов в формулах (3).

Коэффициенты λ , μ , ν .

Умножим обе части каждого из равенств (3) на вектор n скалярно. С учетом равенств $(r_u, n) = 0$, $(r_v, n) = 0$ и формул (6) получаем, что искомые коэффициенты совпадают с соответствующими коэффициентами второй квадратичной формы:

$$\lambda = L, \mu = M, \nu = N. \quad (7)$$

Коэффициенты Γ_{ij}^k .

Умножим скалярно обе части первого из равенств (3) сначала на вектор \mathbf{r}_u , а затем на вектор \mathbf{r}_v . С учетом формул (5) получим соответственно

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u) &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \\(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v) &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G.\end{aligned}\quad (8)$$

Скалярные произведения в левых частях соотношений (8) определяются через производные коэффициентов первой квадратичной формы:

$$(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u) = \frac{1}{2} E_u, \quad (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v) = F_u - \frac{1}{2} E_v. \quad (9)$$

Первое из этих равенств получается после дифференцирования по u обеих частей равенства $\mathbf{r}_u^2 = E$. Чтобы убедиться в справедливости второго, достаточно продифференцировать по u равенство $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = F$ и по v — равенство $\mathbf{r}_u^2 = E$:

$$(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v) + (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv}) = F_u, \quad 2(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u) = E_v,$$

а затем исключить произведение $(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u)$.

Разрешая уравнения (8) относительно неизвестных Γ_{11}^1 и Γ_{11}^2 , с учетом формул (9) получим, что

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{W} \left(\frac{1}{2} E_u G - F_u F + \frac{1}{2} E_v F \right), \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{W} \left(-\frac{1}{2} E_u F + F_u E - \frac{1}{2} E_v E \right),\end{aligned}\quad (10)$$

где $W = EG - F^2 > 0$.

Применяя тот же прием ко второму и третьему уравнениям (3), вычислим остальные коэффициенты Γ_{ij}^k :

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{W} \left(\frac{1}{2} E_v G - \frac{1}{2} G_u F \right), \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{W} \left(\frac{1}{2} G_u E - \frac{1}{2} E_v F \right), \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{W} \left(-\frac{1}{2} G_u G + F_v G - \frac{1}{2} G_v F \right), \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{W} \left(\frac{1}{2} G_v E - F_v F + \frac{1}{2} G_v F \right).\end{aligned}\quad (11)$$

Отметим, что коэффициенты Γ_{ij}^k (они называются *символами Кристоффеля*) выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы E, F, G и их первые производные.

Обратимся теперь к вычислению коэффициентов α_{ij} в формулах (4).

Продифференцировав тождество

$$n^2=1$$

по u и по v , получим, что

$$(n_u, n)=0, (n_v, n)=0.$$

Это означает, что векторы n_u и n_v ортогональны нормальному вектору n и, следовательно, параллельны касательной плоскости поверхности в рассматриваемой точке. Поэтому в формулах (4)

$$\alpha_{13}=\alpha_{23}=0.$$

Умножим обе части соотношения

$$n_u=\alpha_{11}\Gamma_u+\alpha_{12}\Gamma_v$$

скалярно на Γ_u и на Γ_v . С учетом формул (6) получим соответственно

$$-L=\alpha_{11}E+\alpha_{12}F, \quad -M=\alpha_{11}F+\alpha_{12}G.$$

Отсюда вытекает, что

$$\alpha_{11}=\frac{MF-LG}{W}, \quad \alpha_{12}=\frac{LF-ME}{W}. \quad (12)$$

Аналогично из соотношения

$$n_v=\alpha_{21}\Gamma_u+\alpha_{22}\Gamma_v$$

вычисляются коэффициенты α_{21} и α_{22} :

$$\alpha_{21}=\frac{NF-MG}{W}, \quad \alpha_{22}=\frac{MF-NE}{W}. \quad (13)$$

Таким образом, мы показали, что производные векторов Γ_u , Γ_v и n линейно выражаются через векторы Γ_u , Γ_v и n , причем коэффициенты в этих разложениях зависят только от коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности и их производных.

Сказанное относится к производным радиус-вектора и единичного вектора нормали поверхности любого порядка.

2°. Основные уравнения теории поверхностей

Если S — C^3 -регулярная поверхность, то справедливы равенства

$$\begin{aligned} (\Gamma_{uu})_v &= (\Gamma_{uv})_u, \quad (\Gamma_{uv})_v = (\Gamma_{vv})_u, \\ (\Gamma_u)_v &= (\Gamma_v)_u. \end{aligned} \quad (14)$$

Каждый из пяти векторов Γ_{uu} , Γ_{uv} , Γ_{vv} , n_u , n_v , входящих в формулы (14), можно представить в виде линейной комбинации век-

торов \mathbf{r}_u , \mathbf{r}_v и \mathbf{n} . Причем, как доказано в предыдущем пункте, коэффициенты в этих разложениях известным образом определяются через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности и производные этих коэффициентов.

Остановимся на этом подробнее.

Рассмотрим разность

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{r}_{uu})_v - (\mathbf{r}_{uv})_u.$$

Заменяя векторы \mathbf{r}_{uu} и \mathbf{r}_{uv} их разложениями по формулам (3), получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 = & \{(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u\} \mathbf{r}_u + \{(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u\} \mathbf{r}_v + \\ & + (L_v - M_u) \mathbf{n} - \Gamma_{12}^1 \mathbf{r}_{uu} + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) \mathbf{r}_{uv} + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_{vv} - M \mathbf{n}_u + N \mathbf{n}_v. \end{aligned}$$

Вновь используя дериационные формулы (3) и (4), перепишем последнее соотношение в следующем виде:

$$\mathbf{B}_1 = \beta_{11} \mathbf{r}_u + \beta_{12} \mathbf{r}_v + \beta_{13} \mathbf{n}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{11} = & (\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + \alpha_{21} L - \alpha_{11} M, \\ \beta_{12} = & (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 + \alpha_{22} L - \alpha_{12} M, \quad (16) \\ \beta_{13} = & L_v - M_u + \Gamma_{11}^1 M - \Gamma_{12}^1 L + \Gamma_{11}^2 N - \Gamma_{12}^2 M. \end{aligned}$$

В силу первого из равенств (14) вектор \mathbf{B}_1 тождественно равен нулю:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}.$$

Отсюда и из линейной независимости векторов \mathbf{r}_u , \mathbf{r}_v и \mathbf{n} вытекает, что коэффициенты в разложении (15) необходимо равны нулю:

$$\beta_{11} = 0, \quad \beta_{12} = 0, \quad \beta_{13} = 0.$$

Применяя тот же прием к разностям

$$\mathbf{B}_2 = (\mathbf{r}_{uv})_v - (\mathbf{r}_{vv})_u$$

и

$$\mathbf{B}_3 = (\mathbf{n}_u)_v - (\mathbf{n}_v)_u,$$

приходим к разложениям

$$\mathbf{B}_i = \beta_{i1} \mathbf{r}_u + \beta_{i2} \mathbf{r}_v + \beta_{i3} \mathbf{n}, \quad i = 2, 3, \quad (17)$$

коэффициенты β_{ij} в которых известным образом выражаются через Γ_{ij}^k , α_{ij} и L , M , N . (Читатель без труда сможет вывести их самостоятельно таким же способом, как были получены формулы (16) для коэффициентов β_{11} , β_{12} и β_{13}).

Все коэффициенты в разложениях (17) равны нулю.

Как и раньше, это следует из равенств

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{0}$$

и линейной независимости векторов $\mathbf{g}_u, \mathbf{g}_v$ и \mathbf{n} .

Итог наших рассуждений коротко можно сформулировать следующим образом:

$$\beta_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Не предъявляя формул для всех коэффициентов β_{ij} явно (как можно судить по соотношениям (16), они достаточно громоздки), укажем путь дальнейшего исследования системы (18).

Заменяя коэффициенты Γ_{ij}^k и α_{ij} в выражениях для β_{ij} через коэффициенты E, F, G, L, M, N первой и второй квадратичных форм при помощи формул (8) — (11), несложно убедиться в том, что только три из девяти равенств (18) независимы.

Именно, одну и ту же формулу дают четыре условия:

$$\beta_{11} = 0, \quad \beta_{12} = 0, \quad \beta_{21} = 0, \quad \beta_{22} = 0.$$

Еще по одной формуле получается из условий

$$\beta_{13} = 0, \quad \beta_{31} = 0$$

и

$$\beta_{23} = 0, \quad \beta_{32} = 0$$

соответственно. Условие

$$\beta_{33} = 0$$

выполняется тождественно.

После простых, хотя и достаточно громоздких, преобразований этим трем формулам удастся придать следующий вид (читателю полезно проделать соответствующие вычисления, чтобы убедиться, в частности, в отсутствии опечаток):

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{4W^2} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{W}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v - F_u}{\sqrt{W}} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{F_v - G_u}{\sqrt{W}} \right\} \quad (19)$$

(формула Гаусса*);

$$2W(L_v - M_u) - (EN - FM + GL)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,$$

* Гаусс (Gauss) Карл Фридрих (30.4.1777—23.2.1855) — немецкий математик.

$$2W(M_v - N_u) - (EN - FM + GL)(F_v - G_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

(формулы Петерсона—Кодацци*), $W = EG - F^2$.

Первая из приведенных формул — формула (19) — несет в себе содержание основной теоремы Гаусса (theorema egregium): кривизна регулярной поверхности

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

может быть выражена только через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их производные.

3°. Теорема Бонне**

Предположим выполненными следующие условия.

В некоторой односвязной открытой области \mathcal{D} (рис. 46) на плоскости параметров u и v заданы две квадратичные формы:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (I)$$

и

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2, \quad (II)$$

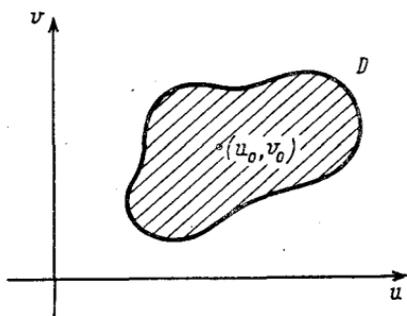


Рис. 46. Односвязная область изменения параметров u и v

т. е. в каждой точке области \mathcal{D} определены функции

$$E = E(u, v), \quad F = F(u, v), \quad G = G(u, v), \quad (21)$$

$$L = L(u, v), \quad M = M(u, v), \quad N = N(u, v) \quad (22)$$

* Петерсон Карл Михайлович (25.5.1828—1.5.1881) — русский математик; Кодацци (Codazzi) Дельфино (7.3.1824—21.7.1873) — итальянский математик.

** Бонне (Bonnet) Пьер Оссиан (22.11.1819—22.6.1892) — французский математик.

Наложим на эти функции ряд ограничений.

1. Потребуем, чтобы всюду в области \mathcal{D} первая из квадратичных форм

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

была положительно определенной.

2. Будем считать, что в каждой точке области \mathcal{D} функции (21)—(22) связаны формулами Гаусса—Петерсона—Кодацци (19)—(20), при этом и сами функции и их производные, входящие в формулы (19)—(20), непрерывны всюду в области \mathcal{D} .

Тогда имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Существует регулярная поверхность, для которой заданные формы (I) и (II) являются соответственно первой и второй квадратичными формами. Формами (I) и (II) эта поверхность определяется однозначно с точностью до положения в пространстве.

Тем самым утверждается, что при выполнении условий 1 и 2 в области \mathcal{D} можно построить векторную функцию

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{D},$$

такую, что

$$d\mathbf{r}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

и

$$(d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

Причем если \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} — произвольные векторы (векторы \mathbf{b} и \mathbf{c} неколлинеарны), то условиями

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{a}, \quad \mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \mathbf{c},$$

где (u_0, v_0) — некоторая точка области \mathcal{D} , эта векторная функция определена однозначно.

* *Существование.* Прежде всего, пользуясь формулами (8)—(11) п. 1°, вычислим по коэффициентам E, F, G, L, M, N заданных квадратичных форм (I) и (II) коэффициенты Γ_{ij}^k и α_{ij} .

Для решения поставленной задачи построим вспомогательную систему дифференциальных уравнений, линейных относительно неизвестных функций ξ, η, ζ :

$$\xi_u = \Gamma_{11}^1 \xi + \Gamma_{11}^2 \eta + L\zeta,$$

$$\xi_v = \Gamma_{12}^1 \xi + \Gamma_{12}^2 \eta + M\zeta,$$

$$\begin{aligned}\eta_u &= \Gamma_{12}^1 \xi + \Gamma_{12}^2 \eta + M \zeta, \\ \eta_v &= \Gamma_{22}^1 \xi + \Gamma_{22}^2 \eta + N \zeta, \\ \zeta_u &= \alpha_{11} \xi + \alpha_{12} \eta, \\ \zeta_v &= \alpha_{21} \xi + \alpha_{22} \eta\end{aligned}\quad (23)$$

(несомненная связь уравнений системы (23) с дериwационными формулами Вейнгартена* (3)—(4) не случайна).

Построенная система (23) обладает следующим замечательным свойством: равенства

$$\begin{aligned}(\Gamma_{11}^1 \xi + \Gamma_{11}^2 \eta + L \zeta)_v &= (\Gamma_{12}^1 \xi + \Gamma_{12}^2 \eta + M \zeta)_u, \\ (\Gamma_{12}^1 \xi + \Gamma_{12}^2 \eta + M \zeta)_v &= (\Gamma_{22}^1 \xi + \Gamma_{22}^2 \eta + N \zeta)_u, \\ (\alpha_{11} \xi + \alpha_{12} \eta)_v &= (\alpha_{21} \xi + \alpha_{22} \eta)_u\end{aligned}\quad (24)$$

выполняются тождественно в силу уравнений (23).

Чтобы убедиться в этом, достаточно провести требуемые дифференцирования и, заменив появляющиеся в результате производные векторных функций ξ , η и ζ по формулам (23), воспользоваться формулами Гаусса—Петерсона—Кодацци (19)—(20).

Тождественное выполнение равенств (24) означает, что для системы (23) соблюдены условия интегрируемости.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что в этом случае система (23) имеет и притом единственное решение при заданных начальных значениях неизвестных функций.

Выберем три вектора ξ_0 , η_0 и ζ_0 так, чтобы они образовывали правую тройку и в некоторой фиксированной точке (u_0, v_0) области \mathcal{D} выполнялись равенства

$$\begin{aligned}\xi_0^2 &= E(u_0, v_0), \quad (\xi_0, \eta_0) = F(u_0, v_0), \quad \eta_0^2 = G(u_0, v_0), \\ (\xi_0, \zeta_0) &= 0, \quad (\eta_0, \zeta_0) = 0, \quad \zeta_0^2 = 1.\end{aligned}\quad (25)$$

Пусть

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad \zeta = \zeta(u, v)\quad (26)$$

— решение системы (23), удовлетворяющее выбранным начальным условиям

$$\xi(u_0, v_0) = \xi_0, \quad \eta(u_0, v_0) = \eta_0, \quad \zeta(u_0, v_0) = \zeta_0.\quad (27)$$

Так как для решения (26) системы (23) выполняется равенство

$$\xi_v = \eta_u,$$

* Вейнгартен (Weingarten) Юлиус (25.3.1836—17.6.1910) — немецкий математик.

то найдется векторная функция

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (28)$$

для которой

$$\mathbf{r}_u = \xi, \quad \mathbf{r}_v = \eta.$$

Эта векторная функция может быть вычислена, например, следующим образом:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \int_l \xi(u, v) du + \eta(u, v) dv$$

(криволинейный интеграл берется вдоль гладкой кривой l , целиком лежащей в области \mathcal{D} и соединяющей точки (u_0, v_0) и (u, v)).

Покажем, что поверхность, задаваемая радиусом-вектором (28), имеет первую и вторую квадратичные формы, соответственно равные заданным формам

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \text{ и } Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства

$$d\mathbf{r}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (29)$$

достаточно в силу соотношения (9) проверить, что

$$\xi^2 = E, \quad (\xi, \eta) = F, \quad \eta^2 = G.$$

Преобразуем уравнения системы (23) к удобной для дальнейших рассмотрений форме.

Умножим их поочередно на векторы ξ , η и ζ . Из полученных при этом восемнадцати скалярных соотношений путем простейших преобразований приходим к двенадцати, которые можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений для скалярных величин

$$\xi^2, \eta^2, \zeta^2, (\xi, \eta), (\xi, \zeta), (\eta, \zeta). \quad (30)$$

Приведем часть из этих двенадцати уравнений:

$$[\xi^2]_u = 2\Gamma_{11}^1 \xi^2 + 2\Gamma_{11}^2 (\xi, \eta) + 2L(\xi, \zeta),$$

$$[\xi^2]_v = 2\Gamma_{12}^1 \xi^2 + 2\Gamma_{12}^2 (\xi, \eta) + 2M(\xi, \zeta), \quad (31)$$

$$[(\xi, \eta)]_u = \Gamma_{12}^1 \xi^2 + (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)(\xi, \eta) + \Gamma_{11}^2 \eta^2 + M(\xi, \zeta) + L(\eta, \zeta),$$

$$[(\xi, \eta)]_v = \Gamma_{12}^1 \xi^2 + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2)(\xi, \eta) + \Gamma_{12}^2 \eta^2 + N(\xi, \zeta) + M(\eta, \zeta).$$

Похожую структуру имеют и остальные восемь уравнений.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что замена в уравнениях (31) величин (30) на

$$E, G, 1, F, 0, 0 \quad (32)$$

соответственно обратит каждое из уравнений (31) в тождество. Это относится и к восьми другим уравнениям.

Обратимся к соотношениям (25) и (27). Набор (32), как и набор (30), в точке (u_0, v_0) области \mathcal{D} принимает значения

$$\xi_0^2, \eta_0^2, 1, (\xi_0, \eta_0), 0, 0$$

соответственно.

Из того, что наборы (30) и (32) имеют одинаковые начальные значения, в силу единственности решения системы (31) вытекает, что эти наборы совпадают тождественно:

$$\xi^2 = E, \quad \eta^2 = G, \quad \zeta^2 = 1, \quad (\xi, \eta) = F, \quad (\xi, \zeta) = 0, \quad (\eta, \zeta) = 0. \quad (33)$$

Первое, второе и четвертое тождества (33) обеспечивают справедливость равенства (29).

Тем самым первая квадратичная форма поверхности с радиус-вектором (28) совпадает с формой (I).

Чтобы убедиться в совпадении второй квадратичной формы поверхности (28) с формой (II), обратимся к оставшимся тождествам (33):

$$(\xi, \zeta) = 0, \quad (\eta, \zeta) = 0, \quad \zeta^2 = 1. \quad (34)$$

Переписав их в несколько иной форме

$$(r_u, \zeta) = 0, \quad (r_v, \zeta) = 0, \quad \zeta^2 = 1,$$

видим, что вектор ζ является единичным вектором нормали поверхности (28). При этом в силу условий, наложенных на начальные значения ξ_0, η_0 и ζ_0 , тройка r_u, r_v и ζ правая и

$$\zeta = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}.$$

Следовательно, коэффициенты второй квадратичной формы построенной поверхности равны соответственно

$$(\xi_u, \zeta), \quad (\xi_v, \zeta) = (\eta_u, \zeta), \quad (\eta_v, \zeta).$$

Умножая обе части каждого из первых четырех уравнений системы (23) скалярно на вектор ζ и принимая во внимание равенства (34), получаем, что

$$(\xi_u, \zeta) = L, \quad (\xi_v, \zeta) = (\eta_u, \zeta) = M, \quad (\eta_v, \zeta) = N.$$

Это означает, что вторая квадратичная форма рассматриваемой поверхности (2) имеет вид

$$(d^2r, \zeta) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

и тем самым совпадает с заданной формой (II).

На этом доказательство существования регулярной поверхности с заданными первой и второй квадратичными формами заканчивается.

Единственность. Покажем, что построенная выше поверхность единственна с точностью до положения в пространстве.

Пусть S_1 и S_2 — поверхности, заданные векторами $\mathbf{r}_1(u, v)$ и $\mathbf{r}_2(u, v)$ ($(u, v) \in \mathcal{D}$), у которых в соответствующих точках совпадают первые квадратичные формы и вторые квадратичные формы. Отметим на каждой из этих поверхностей по точке, отвечающей набору параметров u и v :

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad (u_0, v_0) \in \mathcal{D}.$$

Параллельным переносом одной из поверхностей (если это необходимо) можно добиться совпадения отмеченных точек.

Считая, что точка X_0 , отвечающая набору параметров (u_0, v_0) , общая для обеих поверхностей, повернем одну из них так, чтобы в общей точке X_0 совпали единичные векторы нормалей к этим поверхностям. При этом, конечно, совпадут и касательные плоскости поверхностей в точке X_0 .

Ясно, что проведенные действия не изменят квадратичных форм поверхности, перемещаемой в пространстве. Это обеспечивается тем, что при параллельном переносе поверхности и при ее повороте сохраняется взаимное расположение производных радиус-вектора и единичного вектора нормали.

Считая, что в общей точке X_0 поверхности S_1 и S_2 имеют общую нормаль, повернем одну из поверхностей вокруг этой нормали так, чтобы в точке X_0 совпали направления соответствующих координатных линий поверхностей, скажем, линий $u = u_0$. Тогда направления координатных линий $v = v_0$ совпадут автоматически вследствие того, что углы между направлениями координатных линий определяются коэффициентами первой квадратичной формы и в точке X_0 у обеих поверхностей они одинаковы.

Пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(u, v), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2(u, v) —$$

радиус-векторы поверхностей S_1 и S_2 соответственно после описанных перемещений. Это означает, что в точке (u_0, v_0) выполняются равенства

$$\mathbf{r}_1(u_0, v_0) = \mathbf{r}_2(u_0, v_0), \quad (35)$$

$$\mathbf{r}_{1,u}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_{2,u}(u_0, v_0), \quad \mathbf{r}_{1,v}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_{2,v}(u_0, v_0), \quad (36)$$

$$\mathbf{n}_1(u_0, v_0) = \mathbf{n}_2(u_0, v_0).$$

Обратимся к системе (23).

Каждый из наборов

$$\xi = \mathbf{r}_{1,u}, \quad \eta = \mathbf{r}_{1,v}, \quad \zeta = \mathbf{n}_1$$

и

$$\xi = \mathbf{r}_{2,u}, \quad \eta = \mathbf{r}_{2,v}, \quad \zeta = \mathbf{n}_2$$

является решением этой системы. Так как в силу условий (35) —

(36) эти решения совпадают в начальной точке (u_0, v_0) , то вследствие единственности решения системы (23) они равны тождественно:

$$r_{1,u}(u, v) = r_{2,u}(u, v), \quad r_{1,v}(u, v) = r_{2,v}(u, v).$$

Отсюда вытекает совпадение дифференциалов

$$dr_1(u, v) = dr_2(u, v)$$

и равенство

$$r_1(u, v) = r_2(u, v) + c.$$

Полагая в нем $u = u_0, v = v_0$, в силу условия (35) получим, что $c = 0$.

Следовательно,

$$r_1(u, v) = r_2(u, v). \quad *$$

§ 6. ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Так называется раздел геометрии, в котором изучаются свойства поверхности, зависящие только от длин кривых на поверхности. Как показано в § 3 этой главы, для регулярных поверхностей это свойства, определяемые первой квадратичной формой. Тем самым объектами внутренней геометрии поверхности являются длина кривой на поверхности, угол между кривыми на поверхности, площадь области на поверхности, гауссова кривизна поверхности.

Здесь мы рассмотрим новые объекты внутренней геометрии поверхности.

1°. Геодезическая кривизна кривой на поверхности

Как было показано в § 4, п. 3°, геодезическая кривизна k_g кривой \mathcal{L} в данной точке поверхности S может быть вычислена по формуле

$$k_g = (k\nu, \tau, n),$$

где τ и ν — единичные векторы касательной кривой \mathcal{L} и главной нормали соответственно, k — кривизна кривой \mathcal{L} , n — единичный вектор нормали к поверхности S .

Векторы τ и $k\nu$ можно выразить через производные радиус-вектора

$$r = r(t)$$

кривой \mathcal{L} при помощи следующих формул:

$$\tau = \frac{dr}{ds} = \frac{r'_t}{|r'_t|},$$

$$k\nu = \frac{d^2r}{ds^2} = r''_{tt} \frac{1}{|r'_t|^2} - r'_t \frac{(r''_{tt}, r'_t)}{|r'_t|^4}$$

(см. гл. 1, § 5).

С учетом этих соотношений формулу для геодезической кривизны k_g можно записать так:

$$k_g = \frac{(\mathbf{r}_{tt}'', \mathbf{r}_t', \mathbf{n})}{|\mathbf{r}_t'|^3}. \quad (1)$$

Если

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

— радиус-вектор поверхности S и

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

— параметрические уравнения кривой \mathcal{L} на поверхности S , то

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)).$$

Вычислим производные радиус-вектора кривой \mathcal{L} , пользуясь последним соотношением. Имеем

$$\mathbf{r}_t' = \mathbf{r}_u u_t' + \mathbf{r}_v v_t', \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_{tt}'' = \mathbf{r}_{uu} (u_t')^2 + 2\mathbf{r}_{uv} u_t' v_t' + \mathbf{r}_{vv} (v_t')^2 + \mathbf{r}_u u_{tt}'' + \mathbf{r}_v v_{tt}'' . \quad (3)$$

Применяя к производным \mathbf{r}_{uu} , \mathbf{r}_{uv} , \mathbf{r}_{vv} в правой части равенства (3) деривационные формулы (3) § 5, получим для \mathbf{r}_{tt}'' следующее выражение:

$$\mathbf{r}_{tt}'' = (u_{tt}'' + A)\mathbf{r}_u + (v_{tt}'' + B)\mathbf{r}_v + C\mathbf{n}. \quad (4)$$

Здесь

$$A = \Gamma_{11}^1 (u_t')^2 + \Gamma_{12}^1 u_t' v_t' + \Gamma_{22}^1 (v_t')^2,$$

$$B = \Gamma_{11}^2 (u_t')^2 + \Gamma_{12}^2 u_t' v_t' + \Gamma_{22}^2 (v_t')^2, \quad (5)$$

$$C = L (u_t')^2 + M u_t' v_t' + N (v_t')^2.$$

Формулы (1), (2) и (4) позволяют найти для геодезической кривизны k_g новое выражение

$$k_g = [(u_{tt}'' + A)v_t' - (v_{tt}'' + B)u_t'] \frac{(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n})}{|\mathbf{r}_t'|^3}. \quad (6)$$

Отсюда, замечая, что

$$|\mathbf{r}_t'| = \sqrt{E (u_t')^2 + 2F u_t' v_t' + G (v_t')^2}$$

и

$$(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}) = \left(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \right) = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2},$$

получим следующую формулу:

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{Eu_t'^2 + 2Fu_t'v_t' + Gv_t'^2}} \left\{ (u_{tt}'' + \Gamma_{11}^1 u_t'^2 + \Gamma_{12}^1 u_t'v_t' + \Gamma_{22}^1 v_t'^2) v_t' - \right. \\ \left. - (v_{tt}'' + \Gamma_{11}^2 u_t'^2 + \Gamma_{12}^2 u_t'v_t' + \Gamma_{22}^2 v_t'^2) u_t' \right\}. \quad (7)$$

Так как символы Кристоффеля выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы, то то же справедливо и для геодезической кривизны k_g кривой на регулярной поверхности.

Тем самым геодезическая кривизна кривой на поверхности является объектом внутренней геометрии поверхности.

2°. Геодезические линии

Кривую на поверхности называют *геодезической линией*, если геодезическая кривизна этой кривой обращается в нуль в каждой ее точке.

ТЕОРЕМА 5. Кривая \mathcal{L} на поверхности S является геодезической в том и только в том случае, когда главная нормаль в каждой точке кривой \mathcal{L} , где ее кривизна отлична от нуля, совпадает с нормалью к поверхности S в этой точке.

* В самом деле, из формулы

$$k_g = k(\mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{n})$$

для геодезической кривизны кривой \mathcal{L} вытекает, что в предположении

$$k_g = 0, \quad k \neq 0,$$

имеем

$$(\mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{n}) = 0.$$

Так как векторы \mathbf{n} и \mathbf{v} , кроме того, ортогональны вектору $\mathbf{r}' = \mathbf{t}$, то отсюда заключаем, что эти векторы коллинеарны.

Обратное очевидно. *

ТЕОРЕМА 6. Через любую точку регулярной поверхности во всяком направлении проходит геодезическая, и притом ровно одна.

* **Существование.** Выберем в произвольной точке $X_0(u_0, v_0)$ на поверхности S некоторое направление $(p : q)$.

Пусть

$$u = u(t), \quad v = v(t) -$$

решение системы дифференциальных уравнений

$$u_{tt}'' + A = 0, \quad v_{tt}'' + B = 0, \quad (8)$$

где функции A и B определяются по формулам (5), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(t_0) = u_0, \quad u'_i(t_0) = p,$$

$$v(t_0) = v_0, \quad v'_i(t_0) = q.$$

Кривая \mathcal{L} на поверхности S , задаваемая уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

имеет нулевую геодезическую кривизну, так как

$$u''_i v'_i - v''_i u'_i + A v'_i - B u'_i = (u''_{ii} + A) v'_i - (v''_{ii} + B) u'_i = 0.$$

Это означает, что кривая \mathcal{L} является геодезической.

Таким образом, геодезическая на поверхности, проходящая через заданную точку $X_0(u_0, v_0)$ в произвольном направлении $(p:q)$, построена.

Перейдем к доказательству единственности (рис. 47).

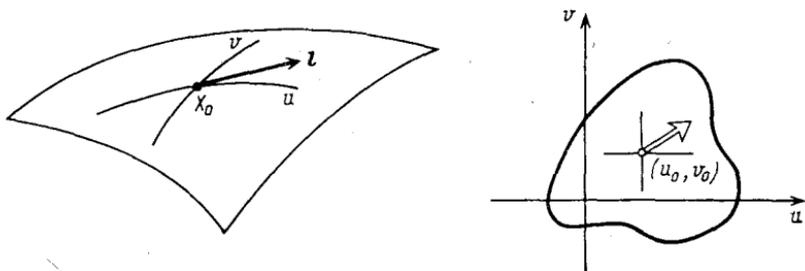


Рис. 47. Направлению на плоскости изменения параметров соответствует направление на поверхности

Допустим, что через точку $X_0(u_0, v_0)$ в направлении $(p:q)$ на поверхности S проходят две геодезические \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 .

Без ограничения общности можно считать, что $q \neq 0$. Это позволяет выбрать координату u за новый параметр и перейти к иному заданию кривых \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 :

$$v = v_1(u), \quad v = v_2(u).$$

При этом будут выполняться соотношения

$$v_i(u_0) = v_0, \quad \frac{dv_i}{du}(u_0) = \frac{p}{q}, \quad i = 1, 2.$$

Приравнивая геодезическую кривизну кривой \mathcal{L}_i , $i = 1, 2$, к нулю, получим, что

$$-\frac{d^2 v_i}{du^2} + A \frac{dv_i}{du} - B = 0, \quad i = 1, 2.$$

Легко видеть, что функции

$$v = v_1(u), \quad v = v_2(u)$$

являются решениями одного и того же дифференциального уравнения

$$-v'' + Av' - B = 0$$

при одинаковых начальных условиях и, значит, тождественно равны:

$$v_1(u) \equiv v_2(u).$$

Таким образом, в некоторой окрестности точки $X_0(u_0, v_0)$ кривые \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 совпадают.

Из приведенных рассуждений вытекает, что кривые \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 совпадают всюду. *

Пример 1. Прямые линии и только они являются геодезическими на плоскости.

Пример 2. Окружности больших кругов (большие окружности) и только они являются геодезическими на сфере (рис. 48).

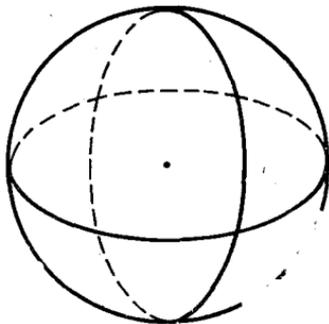


Рис. 48. Большие окружности — геодезические на сфере

* В этом можно убедиться как непосредственными вычислениями, так и путем следующих рассуждений.

Большая окружность является геодезической, так как ее кривизна, обратная радиусу сферы, в каждой точке отлична от нуля, а главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности. Из того, что большую окружность можно провести через каждую точку во всяком направлении, в силу доказанной выше единственности заключаем, что других геодезических на сфере нет. *

3°. Полугеодезические координатные системы

Определение. Координатная система на поверхности называется *полугеодезической*, если координатные линии различных семейств попарно ортогональны и одно из семейств состоит из геодезических линий.

Покажем, что на регулярной поверхности S в достаточно малой окрестности любой ее точки X можно ввести полугеодезическую систему координат.

Пусть \mathcal{L} — произвольная гладкая кривая на поверхности S , проходящая через точку X . Проведем через каждую точку кривой \mathcal{L} , достаточно близкую к точке X , геодезическую линию, образуя с кривой \mathcal{L} в точке пересечения прямой угол.

Построенное семейство геодезических линий поверхности S , ортогональных кривой \mathcal{L} , зависит от одного параметра (например, длины дуги кривой \mathcal{L} , отсчитываемой от точки X) и обладает следующим свойством: через каждую точку достаточно малой окрестности U точки X на поверхности S проходит ровно одна геодезическая семейства.

Второе семейство координатных линий состоит из ортогональных траекторий построенных геодезических.

Кривая \mathcal{L} (она принадлежит второму семейству) называется базой полугеодезической координатной системы. Часто в качестве базы полугеодезической системы координат выбирают геодезическую линию (рис. 49).

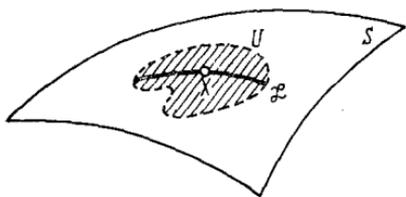


Рис. 49. База \mathcal{L} и ортогональные к ней геодезические

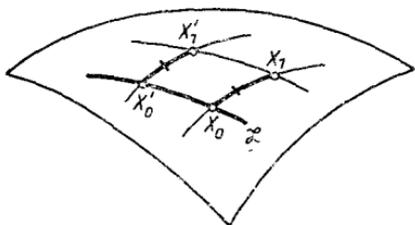


Рис. 50. Отрезки X_0X_1 и $X_0'X_1'$ геодезических, ортогональных кривой \mathcal{L} , имеют равные длины

Принимая кривые первого семейства геодезических за координатные линии $v = \text{const}$, а их ортогональные траектории за координатные линии $u = \text{const}$, получим, что первая квадратичная форма поверхности S в окрестности U имеет вид

$$I = ds^2 = Edu^2 + Gdv^2.$$

Полагая в уравнении геодезических

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0$$

$v = \text{const}$, получим, что

$$B = 0.$$

Отсюда и из формул (10) — (11) § 5 для символов Кристоффеля вытекает, что

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G} = 0.$$

Тем самым коэффициент E зависит только от переменной u .

Вводя вместо u новый параметр

$$\tilde{u} = \int_0^u \sqrt{E(x)} dx,$$

можно еще более упростить первую квадратичную форму:

$$I = d\tilde{u}^2 + \tilde{G}(\tilde{u}, v) dv^2.$$

Положим

$$\tilde{v} = \int_0^v \sqrt{\tilde{G}(0, y)} dy.$$

Тогда в новых координатах (\tilde{u}, \tilde{v}) первая квадратичная форма примет следующий вид:

$$I = d\tilde{u}^2 + \tilde{\tilde{G}}(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{v}^2,$$

причем

$$\tilde{\tilde{G}}(0, \tilde{v}) = 1.$$

Для линий $\tilde{v} = \text{const}$ получаем, что

$$s = \int_{\tilde{u}_1}^{\tilde{u}_2} d\tilde{u} = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1.$$

Отсюда вытекает, что ортогональные траектории семейства геодезических отсекают на геодезических линиях дуги равной длины (рис. 50).

З а м е ч а н и е. В случае, когда база $\tilde{u}=0$ — геодезическая линия, вдоль нее выполняется равенство

$$\tilde{\tilde{G}}_{\tilde{u}} = 0.$$

4°. Полугеодезические полярные координаты

Пусть X_0 — произвольная точка поверхности S . Рассмотрим семейство геодезических линий, исходящих из точки X_0 во всевозможных направлениях. Зафиксируем одно из этих направлений. Обозначим через φ угол, образуемый геодезической линией, проходящей через точку X , с этим направлением.

Ортогональные траектории построенного семейства отсекают на всех геодезических дуги равной длины, считая от точки X_0 . Тем самым каждая из линий $\rho = \text{const}$ второго семейства, обойдя вокруг точки X_0 , возвращается в исходную точку (рис. 51).

Замкнутые кривые $\rho = \text{const}$ называются *геодезическими окружностями* на поверхности S радиуса ρ с центром в точке X_0 .

Множество точек на поверхности, ограниченное геодезической окружностью и содержащее точку X_0 , называют *геодезическим кругом*.

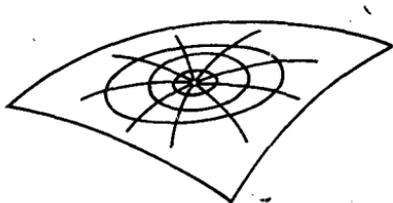


Рис. 51. Полугеодезическая полярная система координат

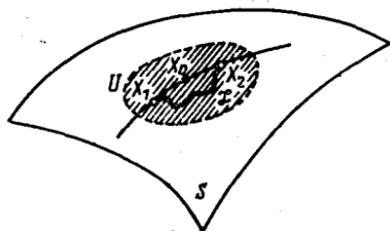


Рис. 52. Длина дуги спрямляемой кривой \mathcal{P} не меньше длины дуги геодезической с теми же концами, если окрестность U точки X на поверхности достаточно мала

При таком выборе параметров первая квадратичная форма поверхности принимает следующий вид:

$$I = d\rho^2 + G(\rho, \varphi) d\varphi^2.$$

Длина геодезической окружности радиуса ρ и площадь ограниченного ею геодезического круга равны соответственно

$$s(\rho) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G(\rho, \varphi)} d\varphi,$$

$$\sigma(\rho) = \int_0^{\rho} d\rho \int_0^{2\pi} \sqrt{G(\rho, \varphi)} d\varphi.$$

5°. Экстремальные свойства геодезических

Пусть X_0 — произвольная точка регулярной поверхности S .

Рассмотрим некоторую геодезическую поверхность S , проходящую через точку X_0 , и покажем, что длина дуги $\cup X_1 X_2$ этой геодезической, находящейся в достаточно малой окрестности точки X_0 на поверхности S , меньше длины любой другой кривой, соединяющей на поверхности S точки X_1 и X_2 (рис. 52).

Пусть X — произвольная точка геодезической окружности достаточно малого радиуса ρ с центром в точке X_0 , а \mathcal{P} — спрямляемая кривая, лежащая в геодезическом круге радиуса ρ и соединяющая точки X_0 и X . Тогда длина s кривой \mathcal{P} удовлетворяет неравенству

$$s \geq \rho,$$

причем равенство возможно лишь в том случае, когда \mathcal{P} — отрезок геодезической между точками X_0 и X (рис. 53).

Введем в этом геодезическом круге полугеодезические полярные координаты ρ , φ . Пусть

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad (t_0 < t \leq t_1)$$

— уравнения кривой \mathcal{L} ,

$$\rho(t_0) = 0; \quad \rho(t_1) = \rho, \quad \varphi(t_1) = \varphi.$$

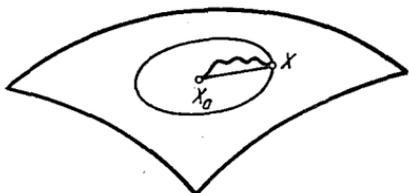


Рис. 53. Геодезическая является локально кратчайшей

Так как длину дуги кривой \mathcal{L} требуется оценить снизу, то естественно ограничиться рассмотрением кривых, не имеющих самопересечений. Тем самым можно считать, что

$$\rho(t) > 0$$

при $t > t_0$.

Если \mathcal{L} — гладкая кривая, то для ее длины s получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\rho'^2(t) + G(\rho(t), \varphi(t)) \varphi'^2(t)} dt \geq \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} |\rho'(t)| dt \geq \left| \int_{t_0}^{t_1} \rho'(t) dt \right| = \rho. \end{aligned}$$

Если \mathcal{L} не есть отрезок геодезической, заключенный между точками X_0 и X_1 , то на некотором отрезке $[t_1', t_2']$ из интервала изменения параметра (t_0, t_1) выполняется условие $\varphi'(t) \neq 0$. Поэтому первое из неравенств в приведенной оценке является строгим.

Равенство возможно лишь в случае, когда $\varphi(t) = \text{const}$, т. е. когда \mathcal{L} — геодезическая, идущая из точки X_0 в точку X .

Выберем на поверхности S окрестность U точки X , столь малой, чтобы она допускала введение полугеодезических полярных координат с полюсом X_0 .

Возьмем на геодезической \mathcal{L}_0 (ее уравнение в выбранной системе координат — $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$) произвольную точку X , лежащую в окрестности U .

Любая кривая \mathcal{L} , соединяющая точки X_0 и X , либо содержится в геодезическом круге радиуса ρ_0 и тогда

$$s \geq \rho_0,$$

либо выходит за пределы этого круга. В последнем случае

$$s > \rho_0,$$

так как $s = s_1 + s_2 > s_1 \geq \rho_0$.

Пример сферы показывает, что экстремальное свойство геодезических носит локальный характер (рис. 54).

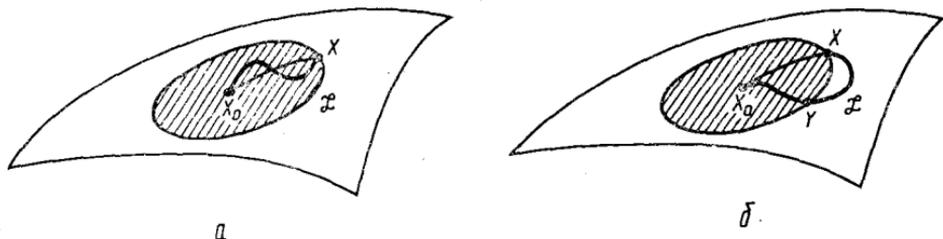


Рис. 54. Кривая \mathcal{L} целиком лежит в геодезическом круге (а), кривая \mathcal{L} пересекает геодезическую окружность, на которой лежит точка X , в отличной от нее точке Y (б)

В самом деле, рассмотрим на сфере любые две точки A и B , не являющиеся концами одного диаметра. Большая окружность, проходящая через эти точки, определена однозначно и разбивается ими на две дуги разной длины. Обе дуги, однако, являются геодезическими с концами A и B (рис. 55).

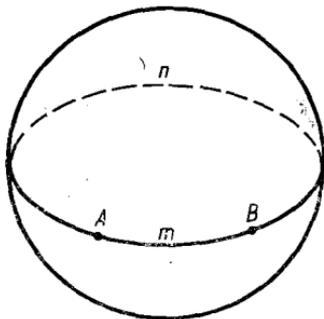


Рис. 55. Длина дуги AnB больше длины дуги AmB

Установленное выше локальное экстремальное свойство геодезических позволяет получить их уравнения методами вариационного исчисления. Именно, геодезические линии являются экстремальными функционала длины дуги

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt.$$

* В самом деле, уравнения Эйлера для этого функционала имеют вид

$$\frac{d}{dt}(L_{u'}) - L_u = 0, \quad \frac{d}{dt}(L_{v'}) - L_v = 0,$$

где

$$L = L(u, v, u', v') = \sqrt{E(u, v)u'^2 + 2F(u, v)u'v' + G(u, v)v'^2}.$$

Отсюда путем прямых вычислений получаем уравнения геодезических

$$u'' + A = 0, \quad v'' + B = 0$$

(ср. формулы (8) пункта 2°). *

6°. Поверхности постоянной кривизны

Проведем через произвольную точку X регулярной поверхности S геодезическую \mathcal{L} и построим в некоторой окрестности U точки X полугеодезическую систему координат с базой \mathcal{L} .

Как показано в пункте 3°, в этих координатах первую квадратичную форму поверхности S в окрестности U можно привести к следующему виду:

$$I = du^2 + B^2(u, v)dv^2, \quad (9)$$

где

$$B(0, v) = 1, \quad B_u(0, v) = 0. \quad (10)$$

При такой параметризации гауссову кривизну K поверхности S можно вычислить по формуле

$$K = -\frac{B_{uu}}{B} \quad (11)$$

(см. формулу (19) пункта 2° § 5).

Таким образом, функция B должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$B_{uu} + KB = 0. \quad (12)$$

Выясним, какой вид имеет коэффициент $G = B^2$ первой квадратичной формы поверхности в случае, когда ее кривизна постоянна.

Для этого нужно проинтегрировать уравнение (12) при начальных условиях (10).

Рассмотрим все три возможности.

1. $K = 0$.

Тогда $B_{uu} = 0$ и функция B тождественно равна единице. Первая квадратичная форма имеет вид

$$I = du^2 + dv^2.$$

$$2. K = k^2 > 0.$$

Решением уравнения

$$B_{uu} + k^2 B = 0$$

с начальными условиями (10) является функция $B = \cos ku$. Тем самым первая квадратичная форма запишется в виде

$$I = du^2 + \cos^2 ku dv^2.$$

$$3. K = -k^2 < 0.$$

Решая уравнение

$$B_{uu} - k^2 B = 0$$

при условиях (10), получаем, что $B = \operatorname{ch} ku$ и

$$I = du^2 + \operatorname{ch}^2 ku dv^2.$$

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Так как вид первой квадратичной формы поверхности постоянной гауссовой кривизны зависит только от того значения, которое эта кривизна принимает, и не зависит от вида самой поверхности, то все поверхности заданной постоянной гауссовой кривизны локально изометричны.

В частности, все поверхности нулевой кривизны локально изометричны плоскости, поверхности постоянной положительной кривизны $K = k^2$ локально изометричны сфере радиуса $1/k$, поверхности постоянной отрицательной кривизны $K = -k^2$ локально изометричны псевдосфере «псевдорайуса» $1/k$ (рис. 56).

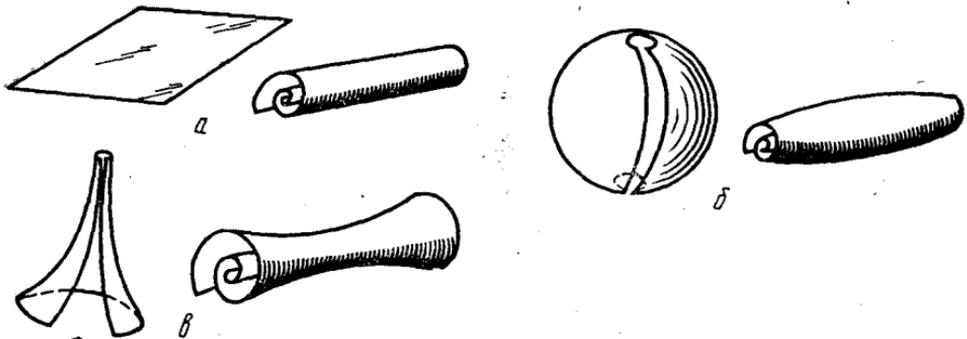


Рис. 56. На рисунках изображены изометричные поверхности: *a* — нулевой кривизны; *b* — положительной кривизны; *v* — отрицательной кривизны

СВОДКА ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ, ФОРМУЛ, ФАКТОВ

A. Простой поверхностью называется множество S точек $M(x, y, z)$, координаты x, y, z которых определяются соотношениями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (*)$$

$$(u, v) \in \mathcal{D}$$

(здесь \mathcal{D} — ограниченная плоская область), если функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ непрерывны в замыкании $\overline{\mathcal{D}}$ и разным точкам (u', v') и (u'', v'') замыкания $\overline{\mathcal{D}}$ отвечают разные точки M' и M'' , координаты x', y', z' и x'', y'', z'' которых вычислены по формулам (*).

Границей простой поверхности S называется множество ∂S точек $M(x, y, z)$, координаты x, y, z которых вычисляются по формулам (*) при условии, что точка (u, v) принадлежит границе $\partial \mathcal{D}$ области \mathcal{D} .

Соотношения (*) называются *параметрическими уравнениями* простой поверхности S .

Б. Вектором (радиус-вектором) поверхности S называется векторная функция

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k},$$

$$(u, v) \in \mathcal{D}.$$

В. Окрестностью точки X на множестве S трехмерного евклидова пространства E^3 называется пересечение множества S и открытого шара с центром в точке X .

Локально-простой поверхностью называется связное множество в пространстве E^3 , у каждой точки которого есть окрестность, представляющая собой простую поверхность.

Г. Плоскость π называется касательной плоскостью к поверхности S в точке X_0 , если плоскость π проходит через эту точку и при стремлении переменной точки X поверхности S к точке X_0 угол между прямой X_0X и плоскостью π стремится к нулю.

Д. Простая поверхность S называется гладкой в точке X_0 , если в этой точке существует касательная плоскость к поверхности и некоторая окрестность точки X_0 на поверхности S однозначно проектируется на эту плоскость.

Простая поверхность называется *гладкой*, если она является гладкой в каждой точке и касательные плоскости этой поверхности изменяются непрерывно.

Достаточные условия гладкости поверхности: если частные производные $\mathbf{r}_u(u, v)$ и $\mathbf{r}_v(u, v)$ вектора $\mathbf{r}(u, v)$ поверхности S непрерывны в области \mathcal{D} задания параметров u и v и всюду в этой области $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$, то поверхность S является гладкой в области \mathcal{D} .

Е. Прямая, проходящая через точку X_0 гладкой поверхности S перпендикулярно касательной плоскости поверхности S в этой точке, называется нормалью поверхности в точке X_0 ; если $\mathbf{r}(u, v)$ — вектор поверхности S , то

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

— единичный вектор ее нормали.

Ж. Поверхность S , заданная вектором $\mathbf{r}(u, v)$, называется C^k -регулярной, если в области \mathcal{D} задания параметров векторная функция $\mathbf{r}(u, v)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков до $k \geq 2$ включительно и всюду в области \mathcal{D} выполняется неравенство $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$.

З. Первой квадратичной формой гладкой поверхности S , заданной вектором $\mathbf{r}(u, v)$, называется выражение

$$I = dr^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где $E = \mathbf{r}_u^2$, $F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$, $G = \mathbf{r}_v^2$ — коэффициенты первой квадратичной формы.

И. Длина кривой \mathcal{L} , лежащей на гладкой поверхности S с векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, вычисляется по формуле

$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} \Big|_{\substack{u=u(t) \\ v=v(t)}} dt,$$

где $u = u(t)$, $v = v(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — уравнения кривой \mathcal{L} на поверхности S .

Угол φ между кривыми \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , лежащими на гладкой поверхности и пересекающимися в точке X_0 , вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{Eu'_1(0)u'_2(0) + F(u'_1(0)v'_2(0) + u'_2(0)v'_1(0)) + Gv'_1(0)v'_2(0)}{\sqrt{Eu'_1(0)^2 + 2Fu'_1(0)v'_1(0) + Gv'_1(0)^2} \sqrt{Eu'_2(0)^2 + 2Fu'_2(0)v'_2(0) + Gv'_2(0)^2}}$$

(здесь $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$ и $u = u_2(t)$, $v = v_2(t)$ — уравнения кривых \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 на поверхности; точке X_0 соответствуют нулевые значения параметров; коэффициенты E, F, G вычислены в точке X_0).

Площадь σ гладкой поверхности S , заданной вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \mathcal{D}$, вычисляется по формуле

$$\sigma = \sigma(S) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Площадь графика функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$, вычисляется по формуле

$$\sigma = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

К. Второй квадратичной формой регулярной поверхности S , заданной вектором $\mathbf{r}(u, v)$, называется выражение

$$II = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -(dr, d\mathbf{n}) = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

где

$$L = \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

— коэффициенты второй квадратичной формы, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S .

Л. Точка X_0 регулярной поверхности S называется *эллиптической*, если дискриминант второй квадратичной формы поверхности S в этой точке положителен: $LN - M^2 > 0$.

Точка X_0 регулярной поверхности называется *гиперболической*, если дискриминант второй квадратичной формы поверхности в этой точке отрицателен: $LN - M^2 < 0$.

Точка X_0 регулярной поверхности S называется *параболической*, если $LN - M^2 = 0$, но $L^2 + N^2 \neq 0$.

Точка X_0 регулярной поверхности S называется *точкой уплощения*, если все коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S в этой точке равны нулю: $L = M = N = 0$.

М. Сечением поверхности S в точке X и в направлении \mathbf{l} на поверхности называется плоская кривая, которая получается при пересечении этой поверхности плоскостью π , проходящей через точку X параллельно вектору \mathbf{l} .

Сечение поверхности S называется *нормальным*, если плоскость π проходит через нормаль поверхности S в точке X .

Нормальной кривизной k_n поверхности S в точке X и в направлении \mathbf{l} называется кривизна нормального сечения поверхности S в этой точке и в этом направлении.

Нормальная кривизна k_n поверхности в направлении \mathbf{l} и кривизна k наклонного сечения поверхности в этом же направлении связаны равенством $k_n = k \cos \Theta$, где Θ — угол между плоскостями соответствующих сечений (*формула Менье*).

Нормальная кривизна k_n поверхности S , заданной вектором $\mathbf{r}(u, v)$, в направлении $(du : dv)$ вычисляется по формуле

$$k_n = \frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Н. Направление на регулярной поверхности называется *главным*, если нормальная кривизна поверхности в этом направлении достигает экстремального значения.

В каждой точке регулярной поверхности существует не менее двух главных направлений.

Экстремальные значения нормальных кривизн в главных направлениях называются *главными кривизнами* поверхности в данной точке.

Точка на поверхности, в которой каждое направление является главным, может быть либо *точкой уплощения* ($k_n = 0$) либо *эллиптической точкой округления* ($k_n = \text{const} > 0$).

О. Кривая на поверхности S , направление которой в каждой ее точке совпадает с главным направлением на поверхности S в этой точке, называется *линией кривизны*.

Дифференциальное уравнение линий кривизны:

$$\begin{vmatrix} dv^2 - du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

В окрестности каждой точки поверхности S , не являющейся ни точкой уплощения ни точкой округления, поверхность S можно параметризовать так, что координатные линии будут линиями кривизны.

Теорема Родрига. Производная единичного вектора \mathbf{n} нормали поверхности и производная вектора \mathbf{g} поверхности, вычисленные в главном направлении, пропорциональны; коэффициент пропорциональности только знаком отличается от соответствующей главной кривизны.

П. Направление на регулярной поверхности называется *асимптотическим*, если нормальная кривизна поверхности в этом направлении обращается в нуль.

Кривая на поверхности называется *асимптотической линией*, если в каждой своей точке эта кривая имеет асимптотическое направление.

Дифференциальное уравнение асимптотических линий:

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

В окрестности гиперболической точки поверхности можно ввести параметризацию, при которой координатные линии будут асимптотическими линиями этой поверхности.

Прямая, лежащая на регулярной поверхности, является ее асимптотической линией.

Касательная плоскость поверхности в каждой точке асимптотической линии является ее соприкасающейся плоскостью.

Р. *Нормальная кривизна* поверхности S в точке X вычисляется по формуле Эйлера

$$k(\varphi) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности S в точке X , а φ — угол с главным направлением, соответствующим главной кривизне k_1 .

С. *Средней кривизной* H поверхности называется полусумма ее главных кривизн

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN - FM + GL}{EG - F^2}.$$

Гауссовой кривизной K поверхности называется произведение ее главных кривизн

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Г. Дериационные формулы Вейнгартена поверхности, заданной вектором $\mathbf{r}(u, v)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_v + L\mathbf{n}, & \mathbf{n}_u &= \alpha_{11} \mathbf{r}_u + \alpha_{12} \mathbf{r}_v, \\ \mathbf{r}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{r}_v + M\mathbf{n}, & \mathbf{n}_v &= \alpha_{21} \mathbf{r}_u + \alpha_{22} \mathbf{r}_v, \\ \mathbf{r}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{r}_v + N\mathbf{n}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$ — единичный вектор нормали поверхности,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u G - 2F_u F + E_v F}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-E_u F + 2F_u F - E_v E}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v G - G_u F}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u E - E_v F}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-G_u G + 2F_v G - G_v E}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v E - 2F_v F + G_u F}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

— символы Кристоффеля,

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{MF - LG}{EG - F^2}, & \alpha_{12} &= \frac{LF - ME}{EG - F^2}, \\ \alpha_{21} &= \frac{NF - MG}{EG - F^2}, & \alpha_{22} &= \frac{MF - NE}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

E, F, G и L, M, N — коэффициенты первой и второй квадратичных форм.

У. Основные уравнения теории поверхностей:
формула Гаусса —

$$\begin{aligned} \frac{LN - M^2}{EG - F^2} &= -\frac{1}{4(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u \right\}, \end{aligned}$$

формулы Петерсона—Кодацци:

$$\begin{aligned} 2(EG - F^2)(L_v - M_u) - (EN - FM + GL)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} &= 0, \\ 2(EG - F^2)(M_v - N_u) - (EN - FM + GL)(F_v - G_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Ф. Теорема Бонне. Пусть в односвязной области \mathcal{D} на плоскости параметров u и v заданы квадратичные формы

$$(I) E du^2 + 2F du dv - G dv^2 \text{ и } (II) L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

первая из которых является положительно определенной, и коэффициенты этих форм связаны соотношениями Y . Тогда существует регулярная поверхность, для которой заданные формы (I) и (II) являются соответственно первой и второй квадратичными формами. Эта поверхность определена однозначно с точностью до положения в пространстве.

Х. Геодезической кривизной k_g кривой \mathcal{L} на поверхности S называется

$$k_g = (k\nu, \tau, n),$$

где τ и ν — единичные векторы касательной кривой \mathcal{L} и главной нормали соответственно, k — кривизна кривой \mathcal{L} , n — единичный вектор нормали поверхности S .

Геодезическая кривизна кривой на поверхности, заданной вектором $\mathbf{r}(u, v)$, вычисляется по формуле

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Cv'^2}} \{ (u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + \Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2) v' - (v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + \Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2) u' \},$$

где $u = u(t)$, $v = v(t)$ — уравнения кривой \mathcal{L} на поверхности, Γ_{jh}^i — символы Кристоффеля (Т).

Ц. Кривая на регулярной поверхности называется *геодезической линией*, если геодезическая кривизна этой кривой обращается в нуль в каждой ее точке.

Кривая \mathcal{L} на поверхности S является геодезической линией в том и только в том случае, когда главная нормаль в каждой точке кривой \mathcal{L} , где ее кривизна отлична от нуля, совпадает с нормалью поверхности S в этой точке.

Через любую точку регулярной поверхности во всяком направлении проходит геодезическая, и притом только одна.

Экстремальное свойство геодезических: длина любой спрямляемой кривой \mathcal{L} на поверхности S , соединяющей достаточно близкие точки X_1 и X_2 поверхности S , не меньше длины дуги геодезической линии, соединяющей эти точки.

Ч. Координатная система на поверхности называется *полугеодезической*, если координатные линии различных семейств попарно ортогональны и одно из семейств состоит из геодезических линий. На регулярной поверхности в достаточно малой окрестности любой ее точки можно ввести полугеодезическую систему координат. Первая квадратичная форма в полугеодезических координатах u и v имеет вид

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к геликоиду (рис. 57)

$$\mathbf{r} = \{v \cos u, v \sin u, ku\}.$$

Ответ: $kx \sin u - ky \cos u + vz - kuv = 0$,

$$\mathbf{R} = \{v \cos u + tk \sin u, v \sin u - tk \cos u, ku + tv\}.$$

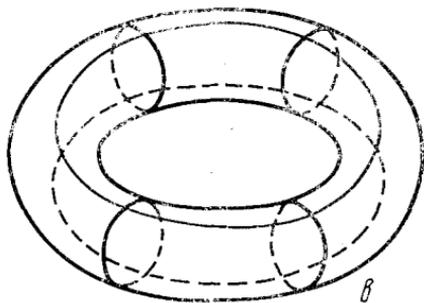
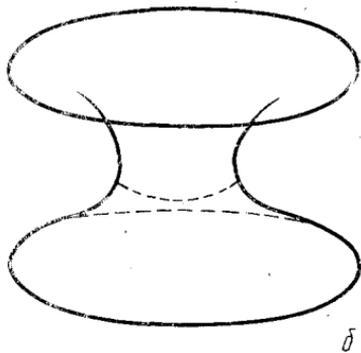
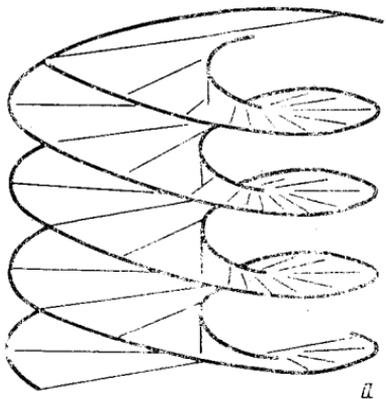


Рис. 57. а — геликоид; б — катеноид; в — тор

2. Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

а) $\mathbf{r} = \{v \cos u, v \sin u, ku\}$ (геликоид);

б) $\mathbf{r} = \{(a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v\}$ (тор) ($a > b$).

Ответ: а) $I = (v^2 + k^2) du^2 + dv^2$; б) $(a + b \cos v)^2 du^2 + b^2 dv^2$.

3. Для поверхности, заданной вектором $\mathbf{r} = \{v \cos u, v \sin u, ku\}$, найти: а) площадь криволинейного треугольника $0 \leq v \leq sh u$, $0 \leq u \leq u_0$; б) длины сторон этого треугольника; в) углы треугольника.

Ответ: а) $\frac{1}{4} (u_0^2 + sh^2 u_0)$; б) $u_0, sh u_0, \sqrt{2} sh u_0$;

в) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.

4. Показать, что поверхности $\mathbf{r}=\{v \cos u, v \sin u, u\}$ (геликоид) и $\mathbf{r}=\{\operatorname{ch} z \cos w, \operatorname{ch} z \sin w, z\}$ (катеноид) локально изометричны.

5. Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

а) $\mathbf{r}=\{\sqrt{u^2+a^2} \cos v, \sqrt{u^2+a^2} \sin v, a \ln(u+\sqrt{u^2+a^2})\}$ (катеноид);

б) $\mathbf{r}=\{(a+b \cos u) \cos v, (a+b \cos u) \sin v, b \sin u\}$ (тор).

Ответ: а) $\Pi = -\frac{a}{u^2+a^2} du^2 + a dv^2$; б) $\Pi = b^2 du^2 + (a+b \cos u) \times \times \cos v dv^2$.

6. Найти на торе $\mathbf{r}=\{(a+b \cos u) \cos v, (a+b \cos u) \sin v, b \sin u\}$ эллиптические, гиперболические и параболические точки.

Ответ: всякая точка на торе, у которой

а) $|u| < \frac{\pi}{2}$, является эллиптической;

б) $|u| > \frac{\pi}{2}$, является гиперболической;

в) $u = \pm \frac{\pi}{2}$, является параболической.

7. Исследовать характер точки $(0, 0, 0)$ на поверхности:

а) $z=x^2+y^2$; б) $z=(x^2+y^2)^2$.

Ответ: а) точка округления; б) точка уплощения.

8. Найти главные направления и главные кривизны геликоида

$$\mathbf{r}=\{u \cos v, u \sin v, av\}.$$

Ответ: $(\pm \sqrt{u^2+a^2} : 1)$, $k_1 = -k_2 = \frac{a}{u^2+a^2}$.

9. Найти линии кривизны геликоида $x=u \cos v, y=u \sin v, z=av$.

Ответ: $v = \pm \ln(u + \sqrt{u^2+a^2}) + c, c = \text{const}$.

10. Найти асимптотические линии катеноида

$$x = \operatorname{ch} u \cos v, y = \operatorname{ch} u \sin v, z = u.$$

Ответ: $u \pm v = \text{const}$.

11. Вычислить гауссову и среднюю кривизны геликоида

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = av.$$

Ответ: $K = -\frac{a^2}{(u^2+a^2)^2}, H = 0$.

12. Показать, что гауссова кривизна поверхности с первой квадратичной формой $I=ds^2=\lambda(u, v)(du^2+dv^2)$ может быть вычислена по формуле

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \ln \lambda,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ — оператор Лапласа*.

13. Найти геодезическую кривизну винтовых линий $u = \text{const}$, лежащих на геликоиде $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$.

Ответ: $k_g = \frac{|a|}{u^2 + a^2}$.

14. Найти геодезические линии геликоида $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = hv$.

Ответ: $v = c_2 \pm \int \frac{c_1 du}{\sqrt{(u^2 + h^2)(u^2 + h^2 - c_1^2)}}$.

* Лаплас (Laplace) Пьер Симон (23.3.1749—5.3.1827) — французский математик и астроном.

ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

[Аппарат римановой геометрии]

Приступая к изучению нового понятия, не всегда целесообразно рассматривать его сразу в максимальной общности. Часто оказывается разумным начать с простых, но вместе с тем и достаточно общих ситуаций. Перенос установленных фактов в последовательно усложняющиеся обстоятельства позволяет, развивая полученные сведения вглубь и вширь, одновременно решать две задачи: 1) более глубокого усвоения открытых ранее свойств, 2) расширения области применимости разработанных методов.

Именно так мы и поступим при изложении основ тензорного исчисления. Основное понятие тензора вводится первоначально в линейном (векторном) пространстве, где строятся и изучаются алгебраические операции над тензорами. Затем мы обращаемся к изучению тензоров в точечном (аффинном) пространстве, отнесенном сначала к прямолинейным, а потом и к криволинейным координатам. Переход к криволинейным координатам усиливает эффективность построенного аппарата и раздвигает область его применения, в частности позволяет ввести важную операцию ковариантного дифференцирования. Завершающим шагом является построение основ тензорного анализа в арифметическом (координатном) пространстве.

А. ЛИНЕЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1. ПОНЯТИЕ ТЕНЗОРА

0°. Примеры

В курсе линейной алгебры значительное внимание уделяется изучению таких геометрических объектов в линейных пространствах, каковыми являются векторы, линейные операторы, линейные и билинейные формы. Фиксируя в n -мерном линейном пространстве V^n базис e_1, \dots, e_n , мы ставим в соответствие каждому из этих объектов (вектору, линейной форме, линейному оператору, билинейной форме) упорядоченный набор чисел — его координат (компонент).

Координаты x^i произвольного вектора x определяются путем его разложения по базису $e = (e_1 \dots e_n)$:

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i.$$

Компоненты α_j^i линейного оператора A определяются путем разложения образов базисных векторов:

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n \alpha_j^i e_i \quad (j=1, \dots, n).$$

Подобным же образом находятся компоненты ω_i линейной формы ω и компоненты β_{ij} билинейной формы \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega(e_i) & \beta_{ij} &= \mathcal{B}(e_i, e_j) \\ (i=1, \dots, n) & & (i, j=1, \dots, n) & \end{aligned}$$

Составим таблицу

Таблица 1

Геометрический объект	Компоненты	Число компонент
Вектор	x^i	n
Линейная форма	ω_i	n
Линейный оператор	α_j^i	n^2
Билинейная форма	β_{ij}	n^2

Заметим, что каждый из рассматриваемых геометрических объектов задается упорядоченным набором n или n^2 чисел.

При переходе от одного базиса к другому эти числа изменяются. Напомним, как это происходит.

Пусть f_1, \dots, f_n — другой базис пространства. Тогда имеют место формулы

$$f_k = \sum_{i=1}^n \lambda_k^i e_i \quad (k=1, \dots, n), \quad e_i = \sum_{k=1}^n \lambda_i^k f_k \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

и для любых i и j , подчиненных условию $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, выполняются соотношения

$$\sum_{m=1}^n \lambda_m^i \lambda_j^m = \sum_{l=1}^n \lambda_i^l \lambda_j^l = \delta_j^i, \quad (2)$$

где

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

— символ Кронекера*.

* Кронекер (Kronecker) Леопольд (7.12.1823—29.12.1891) — немецкий математик, член Петербургской АН (с 1872 года).

Обозначим для удобства компоненты рассматриваемых геометрических объектов относительно нового базиса теми же буквами, но со штрихом слева вверху. Тогда законы преобразования компонент можно записать так:

Таблица 2

Геометрический объект	Закон преобразования
Вектор	$'x^j = \sum_{i=1}^n x^i \lambda_i^j$
Линейная форма	$'\omega_j = \sum_{i=1}^n \omega_i \lambda_i^j$
Линейный оператор	$'\alpha_m^k = \sum_{i,j=1}^n \alpha_j^i \lambda_i^k \lambda_m^j$
Билинейная форма	$'\beta_{km} = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} \lambda_i^k \lambda_m^j$

Таким образом, для произвольного базиса каждый из указанных выше геометрических объектов задается упорядоченным набором n^l (l равно 1 или 2) чисел, изменяющихся при переходе к другому базису по определенным правилам (единым для объектов одной природы).

Интересно отметить, что правила преобразования компонент рассматриваемых геометрических объектов можно принять за их определения.

Покажем это, обратившись, например, к линейным операторам.

В курсе линейной алгебры линейный оператор A определяется обыкновенно как отображение линейного пространства V^n в себя ($A: V^n \rightarrow V^n$), переводящее линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию их образов:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Изучая свойства линейного оператора, приходим к его матрице (α_j^i) , элементы которой определяются из соотношений

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^j e_i \quad (j=1, \dots, n), \quad (3)$$

а при переходе к другому базису f преобразуются по правилу

$$'\alpha_m^k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j^i \lambda_i^k \lambda_m^j \quad (k, m=1, \dots, n). \quad (4)$$

Известно, что линейный оператор однозначно определяется своим действием на базисные векторы. Поэтому, задавая матрицу

(α_j^i) и закон (4) преобразования ее элементов, при фиксированном базисе e , пользуясь формулами (3), можно построить и при этом ровно один линейный оператор.

З а м е ч а н и е. Некоторые геометрические объекты, вычисление которых требует задания базиса, от выбора базиса вообще не зависят. Таковыми являются, например, ранг, след и определитель линейного оператора, ранг и индекс билинейной формы и др.

1°. Определение тензора

Развивая замеченное сходство в способах задания векторов, операторов и форм (при помощи упорядоченных наборов чисел) и формулах их преобразования (при переходе к другому базису), введем основное понятие тензора.

Определение. Будем говорить, что в n -мерном линейном пространстве V^n задан тензор T типа $\binom{p}{q}$, если

1) для каждого базиса e_1, \dots, e_n указывается упорядоченный набор n^{p+q} чисел

$$T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \quad \left(\begin{array}{l} 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 \leq n, \dots, 1 \leq j_q \leq n \end{array} \right)$$

— компонент (координат) тензора в базисе e_1, \dots, e_n ,

2) для набора компонент

$$T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \quad \left(\begin{array}{l} 1 \leq k_1 \leq n, \dots, 1 \leq k_p \leq n \\ 1 \leq l_1 \leq n, \dots, 1 \leq l_q \leq n \end{array} \right)$$

тензора T в базисе f_1, \dots, f_n справедливо представление

$$T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_p} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_q} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \lambda_{i_1}^{k_1} \dots \lambda_{i_p}^{k_p} \chi_{i_1}^{l_1} \dots \chi_{i_q}^{l_q} \quad (5)$$

— закон преобразования компонент тензора T (все индексы, по которым ведется суммирование, независимо изменяются от 1 до n).

Нетрудно заметить, что место каждого индекса у компонент тензора (вверху или внизу) связано с законом преобразования.

Верхние индексы у компонент тензора называются *контравариантными индексами*, а нижние — *ковариантными*.

Тензор

$$T = \left(T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \right)$$

является p раз контравариантным и q раз ковариантным. Его ранг равен $p+q$.

Из закона преобразования (5) компонент тензора вытекает, что если все компоненты тензора в некотором базисе равны нулю, то они будут нулевыми и во всех других базисах.

Примеры тензоров.

1. Скаляр—тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Сравнявая формулы, приведенные в табл. 2, с законом преобразования компонент тензора, убеждаемся в том, что:

вектор является тензором типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

линейная форма — тензором типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

линейный оператор — тензором типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

билинейная форма — тензором типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Символ Кронекера δ_j^i — тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\delta_l^k = \sum_i \sum_j \delta_j^i \lambda_i^k \chi_l^j = \sum_i \lambda_i^k \chi_l^i = \delta_l^k.$$

Запишем закон преобразования компонент тензора T короче:

$$T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = \sum_{(i), (l)} T_{i_1 \dots i_q}^{l_1 \dots l_p} \lambda_{i_1}^{k_1} \dots \lambda_{i_p}^{k_p} \chi_{l_1}^{j_1} \dots \chi_{l_q}^{j_q}, \quad (6)$$

где $(i) = (i_1 \dots i_p)$, $(j) = (j_1 \dots j_q)$, а символ $\sum_{(i), (j)}$ означает, что суммирование проводится по каждому из индексов $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$, независимо изменяющихся от 1 до n .

Заметим, что выбор букв для обозначения индексов суммирования в формуле (6) произволен, однако они должны быть различны.

Закон преобразования (6) будем называть *тензорным законом типа* $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Выразим компоненты $T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}$ тензора T в базисе e_1, \dots, e_n через его компоненты $T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p}$ в базисе f_1, \dots, f_n .

УТВЕРЖДЕНИЕ. Справедлива формула

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = \sum_{(k), (l)} T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \chi_{k_1}^{j_1} \dots \chi_{k_p}^{j_p} \lambda_{l_1}^{i_1} \dots \lambda_{l_q}^{i_q}. \quad (7)$$

* Преобразуем выражение, стоящее в правой части доказываемой формулы (7), пользуясь законом (6)

$$T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = \sum_{(s), (t)} T_{i_1 \dots i_q}^{s_1 \dots s_p} \lambda_{s_1}^{k_1} \dots \lambda_{s_p}^{k_p} \chi_{t_1}^{i_1} \dots \chi_{t_q}^{i_q}$$

и очевидными формулами

$$\sum_k \lambda_s^k \kappa_k^i = \delta_s^i, \quad \sum_l \kappa_l^i \lambda_j^l = \delta_j^i.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{(k),(l)} {}'T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \kappa_{k_1}^{l_1} \dots \kappa_{k_p}^{l_p} \lambda_{j_1}^{l_1} \dots \lambda_{j_q}^{l_q} = \\ &= \sum_{(k),(l)} \left(\sum_{(s),(t)} T_{t_1 \dots t_q}^{s_1 \dots s_p} \lambda_{s_1}^{t_1} \dots \lambda_{s_p}^{t_p} \kappa_{k_1}^{t_1} \dots \kappa_{k_q}^{t_q} \right) \kappa_{k_1}^{l_1} \dots \kappa_{k_p}^{l_p} \lambda_{j_1}^{l_1} \dots \lambda_{j_q}^{l_q} = \\ &= \sum_{(s),(t)} T_{t_1 \dots t_q}^{s_1 \dots s_p} \sum_{(k),(l)} \left(\lambda_{s_1}^{k_1} \kappa_{k_1}^{l_1} \right) \dots \left(\lambda_{s_p}^{k_p} \kappa_{k_p}^{l_p} \right) \left(\kappa_{l_1}^{t_1} \lambda_{j_1}^{l_1} \right) \dots \left(\kappa_{l_q}^{t_q} \lambda_{j_q}^{l_q} \right) = \\ &= \sum_{(s),(t)} T_{t_1 \dots t_q}^{s_1 \dots s_p} \delta_{s_1}^{t_1} \dots \delta_{s_p}^{t_p} \delta_{j_1}^{t_1} \dots \delta_{j_q}^{t_q} = T_{l_1 \dots l_q}^{i_1 \dots i_p} * \end{aligned}$$

2°. Корректность определения тензора

Покажем, что данное выше определение тензора корректно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть p и q — произвольные неотрицательные целые числа. Тогда в пространстве V^n существуют тензоры типа $\binom{p}{q}$. * Выберем в пространстве V^n базис e_1, \dots, e_n . Произвольно

взятый набор n^{p+q} чисел $T_{l_1 \dots l_q}^{i_1 \dots i_p}$ ($1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_p \leq n, 1 \leq j_1 \leq n, \dots, 1 \leq j_q \leq n$) будем рассматривать как совокупность компонент тензора типа $\binom{p}{q}$ относительно этого базиса.

Укажем сначала, как построить компоненты тензора относительно любого другого базиса.

Пусть f_1, \dots, f_n — базис пространства V^n ;

$$f_j = \sum_i \kappa_i^j e_i, \quad e_i = \sum_j \lambda_j^i f_j.$$

Определим набор n^{p+q} чисел $'T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}$ по правилу (6):

$$'T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} = \sum_{(i),(j)} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \lambda_{i_1}^{k_1} \dots \lambda_{i_p}^{k_p} \kappa_{l_1}^{j_1} \dots \kappa_{l_q}^{j_q}.$$

Чтобы убедиться в том, что тем самым в пространстве V^n действительно построен тензор типа $\binom{p}{q}$, достаточно проверить, является ли тензорным закон преобразования компонент при переходе от одного произвольно взятого базиса к другому, тоже произвольному.

Пусть f_1, \dots, f_n и g_1, \dots, g_n — два произвольных базиса пространства V^n ;

$$g_h = \sum_j \mu_j^h f_j, \quad f_j = \sum_k \nu_k^j g_k.$$

Компоненты $'T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}$ относительно базиса f_1, \dots, f_n определим по формуле (6), а компоненты $''T_{s_1 \dots s_q}^{m_1 \dots m_p}$ относительно базиса g_1, \dots, g_n по следующему правилу:

$$''T_{s_1 \dots s_q}^{m_1 \dots m_p} = \sum_{(i), (l)} T_{i_1 \dots i_q}^{l_1 \dots l_p} \tau_{i_1}^{m_1} \dots \tau_{i_p}^{m_p} \sigma_{s_1}^{l_1} \dots \sigma_{s_q}^{l_q}, \quad (8)$$

где σ_s^j — элементы матрицы перехода от базиса e к базису g , а τ_i^m — элементы обратной матрицы:

$$g_s = \sum_j \sigma_s^j e_j, \quad e_i = \sum_m \tau_i^m g_m.$$

Покажем, что указанный тензорный закон (типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$) сохраняется и при переходе от компонент $'T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}$ к компонентам $''T_{s_1 \dots s_q}^{m_1 \dots m_p}$.

Прежде чем подставлять в правую часть формулы (8) выражение (7) для $T_{i_1 \dots i_q}^{l_1 \dots l_p}$, заметим, что

$$\mu_s^l = \sum_j \sigma_s^j \lambda_j^l, \quad \nu_k^m = \sum_i \kappa_k^i \tau_i^m.$$

Теперь уже нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned} ''T_{s_1 \dots s_q}^{m_1 \dots m_p} &= \sum_{(i), (j)} \left(\sum_{(k), (l)} 'T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \kappa_{k_1}^{i_1} \dots \kappa_{k_p}^{i_p} \lambda_{j_1}^{l_1} \dots \lambda_{j_q}^{l_q} \right) \tau_{i_1}^{m_1} \dots \tau_{i_p}^{m_p} \sigma_{s_1}^{j_1} \dots \sigma_{s_q}^{j_q} = \\ &= \sum_{(k), (l)} 'T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \left(\sum_{(i), (j)} \left(\kappa_{k_1}^{i_1} \tau_{i_1}^{m_1} \right) \dots \left(\kappa_{k_p}^{i_p} \tau_{i_p}^{m_p} \right) \left(\lambda_{j_1}^{l_1} \sigma_{s_1}^{j_1} \right) \dots \left(\lambda_{j_q}^{l_q} \sigma_{s_q}^{j_q} \right) \right) = \\ &= \sum_{(k), (l)} 'T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \nu_{k_1}^{m_1} \dots \nu_{k_p}^{m_p} \mu_{s_1}^{l_1} \dots \mu_{s_q}^{l_q} * \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. На практике для задания тензора, как правило, используют именно этот прием: относительно выбранной координатной системы (часто естественным образом приспособленной к рассматриваемой задаче) задаются компоненты тензора и указывается его тип. Закон преобразования позволяет находить в случае необходимости компоненты тензора в любой другой координатной системе.

3°. Равенство тензоров

Определение. Тензоры T и S называются *равными*, если они имеют один и тот же тип и все их компоненты относительно какого-либо базиса соответственно равны.

Обозначение: $T=S$.

Остановимся на этом подробнее. Пусть

$$T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \text{ и } S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$$

— компоненты тензоров T и S относительно базиса e_1, \dots, e_n . Равенство $T=S$ означает, что

$$T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$$

для всех $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$, удовлетворяющих условию

$$1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_p \leq n, \quad 1 \leq j_1 \leq n, \dots, 1 \leq j_q \leq n,$$

а в остальном произвольных.

Из закона преобразования компонент тензора вытекает, что указанное свойство сохраняется при переходе к любому другому базису: если $'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p}$ и $'S_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p}$ — компоненты равных тензоров T и S относительно базиса f_1, \dots, f_n , то

$$'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = 'S_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p}$$

для любых $k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q$, подчиняющихся условию

$$1 \leq k_1 \leq n, \dots, 1 \leq k_p \leq n, \quad 1 \leq l_1 \leq n, \dots, 1 \leq l_q \leq n.$$

Определение. Тензор U называется *противоположным* тензору T , если он имеет тот же тип и в некотором базисе выполняются равенства

$$U_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = -T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Ясно, что при переходе к другому базису указанное в определении свойство сохраняется.

Определение. Тензор, все компоненты которого равны нулю, называется *нулевым* тензором.

Отметим, что компоненты нулевого тензора равны нулю в любом базисе.

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ТЕНЗОРАМИ

1°. Определение алгебраических операций над тензорами

Введем несколько операций над тензорами. Доказательство того, что в результате каждой из этих операций получается тензор, будет дано в 3°.

1+. *Линейная комбинация тензоров.* Пусть

$$T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) \text{ и } S = (S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$$

— тензоры типа $\binom{p}{q}$, α и β — произвольные числа. Тогда линейная комбинация

$$U = \alpha T + \beta S$$

с компонентами

$$U_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = \alpha T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \beta S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$$

также есть тензор типа $\binom{p}{q}$.

2+. *Умножение тензоров.* Пусть

$$T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$$

— тензор типа $\binom{p}{q}$ и

$$S = (S_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_k})$$

— тензор типа $\binom{k}{m}$. Положим

$$U_{i_1 \dots i_q j_{q+1} \dots j_{q+m}}^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+k}} = T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} S_{j_{q+1} \dots j_{q+m}}^{i_{p+1} \dots i_{p+k}}$$

Тогда

$$U = (U_{i_1 \dots i_{q+m}}^{i_1 \dots i_{p+k}})$$

— тензор типа $\binom{p+k}{q+m}$, называемый *произведением тензора T на тензор S* .

Обозначение: $U = T \otimes S$.

Отметим, что в общем случае

$$T \otimes S \neq S \otimes T.$$

3+. *Транспонирование тензора.* Пусть

$$T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$$

— тензор типа $\binom{p}{q}$, где $q \geq 2$.

А. Рассмотрим перестановку чисел $(1 \dots q)$ вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & \dots & s & \dots & q \\ 1 & \dots & s & \dots & r & \dots & q \end{pmatrix};$$

σ переставляет местами только числа r и s ($1 \leq r < s \leq q$).

Положим

$$\tilde{T}_{i_1 \dots i_r \dots i_s \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{i_1 \dots i_s \dots i_r \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$$

Тогда $\tilde{T} = (\tilde{T}_{i_1 \dots i_r \dots i_s \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ — тензор типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Будем говорить, что тензор \tilde{T} получен *транспонированием* тензора T по двум нижним индексам (r -му и s -му).

Здесь заданный упорядоченный набор чисел заменяется другим упорядоченным набором, составленным из тех же чисел. При этом переупорядочение заданного числового набора проводится по единой схеме для каждого базиса пространства.

Б. Операцию транспонирования можно определить для любого числа нижних индексов.

Рассмотрим перестановку

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(q) \end{pmatrix}.$$

На наборе $(j_1 \dots j_q)$ перестановка σ действует по правилу

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_q \\ j_{\sigma(1)} & \dots & j_{\sigma(q)} \end{pmatrix}$$

или, что то же, $\sigma(j_1 \dots j_q) = (j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)})$.

Будем говорить, что тензор T с компонентами

$$\tilde{T}_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{\sigma(i_1 \dots i_q)}^{i_1 \dots i_p}$$

получен из тензора T *транспонированием по нижним индексам при помощи перестановки σ* .

В. Операция транспонирования тензора по верхним индексам определяется аналогично.

Г. Операция транспонирования тензора при помощи перестановки индексов разных типов (верхних и нижних) не определена.

4+. *Свертывание тензора. Пусть*

$$T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$$

— тензор типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, где $p \geq 1$, $q \geq 1$. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{i_1 \dots \widehat{i}_r \dots i_q}^{i_1 \dots \widehat{i}_p \dots i_p} &= \tilde{T}_{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_q}^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p} = \\ &= T_{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_q}^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p} + \dots + T_{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_q}^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tilde{T} = (\tilde{T}_{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_q}^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p})$$

— тензор типа $\binom{p-1}{q-1}$, называемый *сверткой тензора* T по k -му верхнему и m -му нижнему индексам.

5+. *Симметрирование и альтернирование.*

А. Определение. Тензор называется *симметричным (по нижним индексам)*, если каждый тензор, получаемый из него транспонированием по любым двум нижним индексам, совпадает с ним.

Примером симметричного тензора типа $\binom{0}{2}$ может служить симметричная билинейная форма.

Пусть

$$T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$$

— тензор типа $\binom{p}{q}$. Положим

$$S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{(j_1 \dots j_q)}^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{q!} \sum_{(\sigma)} T_{\sigma(i_1 \dots i_q)}^{i_1 \dots i_p} \quad (A)$$

(суммирование ведется по всевозможным перестановкам индексов j_1, \dots, j_q).

Тогда

$$S = (S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$$

— тензор типа $\binom{p}{q}$, симметричный по нижним индексам.

Определение. Операция (А) построения симметричного тензора S называется *симметрированием* тензора T по нижним индексам.

Б. Определение. Тензор называется *кососимметричным (по нижним индексам)*, если каждый тензор, получаемый из него транспонированием по любым двум нижним индексам, противоположен ему.

Пусть

$$T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$$

— тензор типа $\binom{p}{q}$. Положим

$$A_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{[i_1 \dots i_q]}^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{q!} \sum_{(\sigma)} \text{sign } \sigma T_{\sigma(i_1 \dots i_q)}^{i_1 \dots i_p} \quad (B)$$

(суммирование ведется по всевозможным перестановкам индексов j_1, \dots, j_q).

Тогда

$$A = (A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$$

— тензор типа $\left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right)$, кососимметричный по нижним индексам.

Определение. Операция (Б) построения кососимметричного тензора A называется *альтернированием* тензора T по нижним индексам.

В. Симметрирование и альтернирование тензора по верхним индексам определяется аналогично.

Г. Симметрирование и альтернирование тензора можно проводить и по части индексов.

2°. Правило суммирования

На пути к овладению техникой обращения с индексами и для упрощения выкладок полезно правило сокращенного суммирования.

Рассмотрим, например, следующее выражение:

$$\sum_{j=1}^n A_j^i B_j^i.$$

Отметим, что индекс суммирования j встречается дважды.

Опуская в этом выражении знак Σ , запишем его так:

$$A_j^i B_j^i.$$

Условимся считать, что повторение буквенного индекса (в данном случае индекса j) будет указывать на то, что по этому индексу ведется суммирование от 1 до n (даже при отсутствии знака суммы). Поэтому последнее выражение нужно понимать так:

$$A_j^i B_j^i = A_1^i B_1^i + \dots + A_n^i B_n^i.$$

Правило сокращенного суммирования. Если в некотором выражении какой-нибудь буквенный индекс повторяется (встречается дважды), то по этому индексу проводится суммирование от 1 до n . Если таких индексов несколько, то суммирование проводится по каждому из них. Знак суммы при этом опускается.

Например, выражение G_{ijk}^{ik} следует понимать так:

$$G_{ijk}^{ik} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n G_{ijk}^{ik}.$$

Из формулы

$$A_j^i B_k^i = \sum_{i=1}^n A_j^i B_k^i = \sum_{i=1}^n A_i^j B_k^i = A_i^j B_k^i$$

вытекает, что обозначения индексов суммирования не играют никакой роли — при замене индекса j на индекс l результат не изменяется:

$$A_j^i B_k^j = A_l^i B_k^l.$$

Индексы i и k в последнем соотношении, в отличие от индексов суммирования j и l , называются *свободными*.

Запишем закон преобразования (1), применяя правило сокращенного суммирования:

$$T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \lambda_{i_1}^{k_1} \dots \lambda_{i_p}^{k_p} \chi_{i_1}^{j_1} \dots \chi_{i_q}^{j_q}. \quad (1)$$

В правой части этой формулы суммирование проводится по дважды повторяющимся индексам $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$.

3°. Теорема об алгебраических операциях над тензорами

ТЕОРЕМА 2. В результате каждой из алгебраических операций $1^+ - 5^+$ над тензорами вновь получаются тензоры.

1⁺. *Линейная комбинация тензоров одного типа является тензором.*

* Компоненты тензоров T и S типа $\binom{p}{q}$ изменяются по одинаковому закону. Запишем этот закон преобразования и для тензора T и для тензора S . Имеем

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} &= T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q} \lambda_{i_1}^{k_1} \dots \lambda_{i_p}^{k_p} \chi_{i_1}^{j_1} \dots \chi_{i_q}^{j_q}, \\ S_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} &= S_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \lambda_{i_1}^{k_1} \dots \lambda_{i_p}^{k_p} \chi_{i_1}^{j_1} \dots \chi_{i_q}^{j_q}. \end{aligned}$$

Умножая обе части первой формулы на число α , второй — на число β и складывая, получаем, что

$$U_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = U_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \lambda_{i_1}^{k_1} \dots \lambda_{i_p}^{k_p} \chi_{i_1}^{j_1} \dots \chi_{i_q}^{j_q}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} U_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} &= \alpha T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \beta S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}, \\ U_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} &= \alpha' T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} + \beta' S_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p}. \end{aligned}$$

Формула (2) показывает, что компоненты геометрического объекта U при переходе от одной координатной системы к другой изменяются по тому же правилу, что и компоненты у T и S , — по тензорному закону типа $\binom{p}{q}$. Это означает, что

$$U = \alpha T + \beta S$$

— тензор типа $\binom{p}{q}$. *

2+. Произведение любых двух тензоров является тензором.

* Перемножая соотношения, описывающие законы преобразования тензоров

T-типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$:

$${}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \lambda_{i_1}^{k_1} \dots \lambda_{i_p}^k \chi_{i_1}^{j_1} \dots \chi_{i_q}^{j_q}$$

и S-типа $\begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix}$:

$${}'S_{i_{q+1} \dots i_{q+r}}^{k_{p+1} \dots k_{p+m}} = S_{i_{q+1} \dots i_{q+r}}^{i_{p+1} \dots i_{p+m}} \lambda_{i_{p+1}}^k \dots \lambda_{i_{p+m}}^{k_{p+m}} \chi_{i_{q+1}}^{j_{q+1}} \dots \chi_{i_{q+r}}^{j_{q+r}}$$

получаем, что

$${}'U_{i_1 \dots i_{q+r}}^{k_1 \dots k_{p+m}} = U_{i_1 \dots i_{q+r}}^{i_1 \dots i_{p+m}} \lambda_{i_1}^{k_1} \dots \lambda_{i_{p+m}}^{k_{p+m}} \chi_{i_1}^{j_1} \dots \chi_{i_{q+r}}^{j_{q+r}}, \quad (3)$$

где

$$U_{i_1 \dots i_{q+r}}^{i_1 \dots i_{p+m}} = T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} S_{i_{q+1} \dots i_{q+r}}^{i_{p+1} \dots i_{p+m}},$$

$${}'U_{i_1 \dots i_{q+r}}^{k_1 \dots k_{p+m}} = {}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} S_{i_{q+1} \dots i_{q+r}}^{k_{p+1} \dots k_{p+m}}.$$

Формула (3) означает, что компоненты геометрического объекта U при переходе к новой координатной системе изменяются по тензорному закону типа $\begin{pmatrix} p+m \\ q+r \end{pmatrix}$. *

Доказательство свойств 3+ и 4+ проведем для тензоров типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Несмотря на то, что это весьма частный случай, ограничения общности, по существу, не возникает. Сказанное следует из того, что в алгебраических операциях 3+ и 4+ активно участвуют ровно два индекса* — либо одного типа (свойство 3+) либо разных типов (свойство 4+).

3+. Транспонирование тензора типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ по нижним индексам приводит к тензору типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

* Рассмотрим тензор,

$$T = (T_{rs}^i)$$

типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Положим

$$\tilde{T}_{rs}^i = T_{sr}^i, \quad {}'\tilde{T}_{lm}^k = {}'T_{ml}^k.$$

* Любую перестановку можно представить как результат конечного числа транспонирований по двум индексам.

Компоненты тензора T преобразуются по правилу (1):

$${}'T_{lm}^k = T_{rs}^i \lambda_i^k \kappa_l^r \kappa_m^s.$$

Пользуясь тем, что выбор букв для обозначения суммирования не влияет на сумму, поменяем в последней формуле r и s местами. Тогда

$${}'T_{lm}^k = T_{sr}^i \lambda_i^k \kappa_l^s \kappa_m^r.$$

Поменяв теперь местами l и m , получим

$${}'T_{ml}^k = T_{sr}^i \lambda_i^k \kappa_m^s \kappa_l^r$$

и, значит,

$$\tilde{T}_{lm}^k = \tilde{T}_{rs}^i \lambda_i^k \kappa_l^r \kappa_m^s.$$

Последнее означает, что

$$\tilde{T} = (\tilde{T}_{rs}^i)$$

— тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *

4+. Свертка тензора типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ является тензором типа $\begin{pmatrix} p-1 \\ q-1 \end{pmatrix}$.

* Пусть

$$T = (T_{rs}^i)$$

— тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Положим

$$\tilde{T}_r = T_{rs}^s, \quad \tilde{T}_l = {}'T_{lm}^m.$$

Вновь прибегая к правилу (1), получим:

$${}'T_{lm}^m = T_{rs}^i \lambda_i^m \kappa_l^r \kappa_m^s.$$

Воспользуемся тем, что $\lambda_i^m \kappa_m^s = \delta_i^s$.

Тогда

$${}'T_{lm}^m = T_{rs}^i \kappa_l^r \delta_i^s = T_{rs}^s \kappa_l^r$$

и, значит, $\tilde{T}_l = \tilde{T}_r \kappa_l^r$.

Тем самым $\tilde{T} = (\tilde{T}_r)$ — тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *

Хорошим упражнением на пути овладения индексным формализмом является проведение доказательства свойств 3+ и 4+ в общей ситуации — для тензора

$$T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}).$$

При этом полезно иметь в виду, что любое транспонирование тензора можно представить как последовательное исполнение транспонирований только по двум индексам.

5+. Симметрирование (альтернирование) тензора типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

дает симметричный (кососимметричный) тензор типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

* Обе операции проводятся по следующей схеме.

А. Находятся все тензоры, получающиеся из заданного транспонированием (по нижним индексам). Их число равно $q!$

Б. Составляется линейная комбинация найденных тензоров:

1) при симметрировании все $q!$ тензоров умножаются на $+1$;
 2) при альтернировании с коэффициентами $+1$ берутся только тензоры, полученные из заданного транспонированием при помощи четных перестановок нижних индексов (число таких тензоров равно $\frac{1}{2} q!$); остальные тензоры берутся с коэффициентами -1 .

Так как транспонирование тензора не изменяет его типа (свойство 3+), то построение указанных линейных комбинаций возможно.

В. Построенная линейная комбинация делится на число слагаемых $q!$

Остается убедиться в том, что транспонирование полученного тензора либо не изменяет его (при симметрировании) либо меняет на противоположный (при альтернировании).

С) При транспонировании тензор S преобразуется в равный ему вследствие того, что эта операция изменит только порядок слагающих его тензоров.

А) При транспонировании тензор A преобразуется в противоположный вследствие того, что изменится не только порядок слагающих его тензоров, но и знак перед каждым из них. *

З а м е ч а н и е. Симметрирование не изменяет симметричного тензора. При альтернировании симметричного тензора получается нулевой тензор. Альтернирование сохраняет кососимметричный тензор. Симметрирование обращает его в нулевой тензор.

4°. Операции над кососимметричными тензорами

В этом пункте мы будем рассматривать ковариантные кососимметричные тензоры.

Все компоненты кососимметричного тензора $T = (T_{i_1 \dots i_q})$ при $q > n$, где n — размерность пространства V^n , равны нулю в силу определения кососимметричности.

Рассмотрим кососимметричный тензор

$$T = (T_{i_1 \dots i_n})$$

типа $\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ и покажем, что все его отличные от нуля компоненты с точностью до знака совпадают друг с другом.

В самом деле, компоненты, у которых совпадают хотя бы два индекса, равны нулю в силу кососимметричности тензора. Если же индексы j_1, \dots, j_n попарно различны, то вследствие той же кососимметрии

$$T_{j_1 \dots j_n} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} T_{12 \dots n}.$$

Пример 1. Пусть $T = (T_{j_1 j_2 j_3})$ — трижды ковариантный кососимметричный тензор в трехмерном пространстве V^3 . Тогда 21 из $27 = 3^3$ компонент равна нулю, а оставшиеся совпадают либо с T_{123} (T_{231}, T_{312}), либо с $-T_{123}$ ($T_{321}, T_{213}, T_{132}$).

В общем случае только $n!$ из общего числа n^n компонент могут быть отличны от нуля. Половина из них равна $T_{12 \dots n}$, а другая — $-T_{12 \dots n}$.

Нетрудно проверить, что сумма кососимметричных тензоров одного типа и произведение кососимметричного тензора на число снова являются кососимметричными тензорами.

Тем самым совокупность кососимметричных тензоров типа $\binom{0}{k}$ образует линейное пространство. Его размерность равна C_n^k .

В частности, размерность пространства кососимметричных тензоров типа $\binom{0}{n}$ равна 1.

Этот же факт легко вытекает из того, что у тензоров типа $\binom{0}{n}$ ровно одна существенная компонента — $T_{12 \dots n}$ и, значит, любые два кососимметричных тензора типа $\binom{0}{n}$ пропорциональны.

Для кососимметричных тензоров можно ввести еще одну операцию — *внешнее умножение*.

Определим внешнее произведение двух ковариантных кососимметричных тензоров

$$T = (T_{i_1 \dots i_q}) \text{ и } S = (S_{j_1 \dots j_r})$$

по следующему правилу:

а) сначала построим тензорное произведение $U = T \otimes S$ с компонентами

$$U_{i_1 \dots i_q j_{q+1} \dots j_{q+r}} = T_{i_1 \dots i_q} \cdot S_{j_{q+1} \dots j_{q+r}};$$

б) затем проальтернируем его, т. е. построим тензор $V = A(U)$ с компонентами

$$\begin{aligned} V_{i_1 \dots i_{q+r}} &= \frac{1}{(q+r)!} \sum_{(\sigma)} \text{sign } \sigma U_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q+r)}} = \\ &= \frac{1}{(q+r)!} \sum_{(\sigma)} \text{sign } \sigma T_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}} \cdot S_{j_{\sigma(q+1)} \dots j_{\sigma(q+r)}} \end{aligned}$$

(здесь суммирование ведется по всевозможным перестановкам

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+r \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(q) & \sigma(q+1) & \dots & \sigma(q+r) \end{pmatrix}$$

чисел $1, \dots, q, q+1, \dots, q+r$.

Полученный кососимметричный тензор V называется *внешним произведением* тензора T на тензор S .

Обозначение: $T \wedge S$.

Пример 2. Пусть $T=(T_{i_1})$ и $S=(S_{j_2})$ —тензоры типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда $V=T \wedge S$ —кососимметричный тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; его компоненты $V_{i_1 i_2}$ вычисляются по правилу

$$V_{i_1 i_2} = \frac{1}{2} [T_{i_1} S_{j_2} - T_{i_2} S_{j_1}].$$

Введенная операция обладает следующими *свойствами*:

$$1^*. S \wedge T = (-1)^{qr} T \wedge S.$$

$$2^*. (T \wedge S) \wedge U = T \wedge (S \wedge U).$$

Последнее свойство позволяет опускать скобки и писать просто $T \wedge S \wedge U$.

* 1-е свойство вытекает из того, что

$$\begin{aligned} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+r \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(q) & \sigma(q+1) & \dots & \sigma(q+r) \end{pmatrix} = \\ = (-1)^{qr} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & r+q \\ \sigma(q+1) & \dots & \sigma(q+r) & \sigma(1) & \dots & \sigma(q) \end{pmatrix}. \quad * \end{aligned}$$

При доказательстве 2-го свойства для простоты ограничимся рассмотрением тензоров типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

* Пусть $T=(T_{i_1})$, $S=(S_{j_2})$, $U=(U_{j_3})$.

Тогда $C=T \wedge S$ —дважды ковариантный кососимметричный тензор с компонентами

$$C_{i_1 i_2} = \frac{1}{2} [T_{i_1} S_{j_2} - T_{i_2} S_{j_1}],$$

а $D=S \wedge U$ —дважды ковариантный кососимметричный тензор с компонентами

$$D_{j_2 j_3} = \frac{1}{2} [S_{j_2} U_{j_3} - S_{j_3} U_{j_2}].$$

Вычисляя далее компоненты тензоров $A=(T \wedge S) \wedge U$ и $B=T \wedge (S \wedge U)$, получим соответственно

$$A_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6} [T_{j_1} S_{j_2} U_{j_3} - T_{j_2} S_{j_1} U_{j_3} + T_{j_2} S_{j_3} U_{j_1} - \\ - T_{j_3} S_{j_2} U_{j_1} + T_{j_3} S_{j_1} U_{j_2} - T_{j_1} S_{j_3} U_{j_2}],$$

$$B_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6} [T_{j_1} S_{j_2} U_{j_3} - T_{j_1} S_{j_3} U_{j_2} + T_{j_2} S_{j_3} U_{j_1} - \\ - T_{j_2} S_{j_1} U_{j_3} + T_{j_3} S_{j_1} U_{j_2} - T_{j_3} S_{j_2} U_{j_1}].$$

Нетрудно заметить, что $A_{j_1 j_2 j_3} = B_{j_1 j_2 j_3}$ для любых j_1, j_2, j_3 . *

З а м е ч а н и е. Можно определить внешнее произведение любого конечного числа сомножителей.

Пример 3. Пусть $\Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(l)}$ — заданные тензоры типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

и $\omega^{(i)} = \alpha_{ij} \Theta^{(j)}$, где α_{ij} — числа, $i = 1, \dots, l$. Тогда

$$\omega^{(1)} \wedge \dots \wedge \omega^{(l)} = \det(\alpha_{ij}) \Theta^{(1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{(l)}. \quad (*)$$

* Формула (*) легко вытекает из того, что

$$\Theta^{(j_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{(j_l)} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & l \\ j_1 & \dots & j_l \end{pmatrix} \Theta^{(1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{(l)}$$

и

$$\det(\alpha_{ij}) = \sum_{(\sigma)} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & l \\ j_1 & \dots & j_l \end{pmatrix} \alpha_{1j_1} \dots \alpha_{lj_l}. \quad *$$

З а м е ч а н и е. С контравариантными кососимметричными тензорами можно поступать совершенно аналогично.

5°. Внешние формы

С ковариантными кососимметричными тензорами тесно связаны полилинейные кососимметричные формы.

Полилинейную (k-линейную) форму определим как функцию k векторных аргументов, линейную по каждому аргументу:

$$a(x_1, \dots, \lambda x_m + \mu y_m, \dots, x_k) = \lambda a(x_1, \dots, x_m, \dots, x_k) + \\ + \mu a(x_1, \dots, y_m, \dots, x_k), \quad m = 1, \dots, k.$$

Полилинейная форма называется *кососимметричной*, или *внешней*, если при перестановке местами любой пары аргументов она изменяет свой знак на противоположный:

$$\omega(x_1, \dots, x_m, \dots, x_l, \dots, x_m, \dots, x_l) = -\omega(x_1, \dots, x_l, \dots, x_m, \dots, x_l).$$

Пусть e_1, \dots, e_n — базис пространства V^n ,

$$x_1 = \xi_1^i e_i, \dots, x_k = \xi_k^h e_h$$

— произвольные векторы.

Тогда

$$\omega(x_1, \dots, x_k) = \omega_{i_1 \dots i_k} \xi_1^{i_1} \dots \xi_k^{i_k},$$

где $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$.

Нетрудно заметить, что $\omega_{i_1 \dots i_k}$ — компоненты кососимметричного тензора типа $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ в базисе e_1, \dots, e_n .

* В самом деле, пусть f_1, \dots, f_n — еще один базис пространства V^n . Раскладывая векторы x_1, \dots, x_k по этому базису

$$x_1 = \eta_1^i f_i, \dots, x_k = \eta_k^j f_j,$$

получим, что

$$\omega(x_1, \dots, x_k) = \omega_{i_1 \dots i_k} \eta_1^{i_1} \dots \eta_k^{i_k},$$

где $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(f_{i_1}, \dots, f_{i_k})$.

Сравнивая последние два выражения для $\omega(x_1, \dots, x_k)$, с учетом формул $\xi^i = \eta^j \kappa_j^i$ получаем

$$\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega_{j_1 \dots j_k} \kappa_{j_1}^{i_1} \dots \kappa_{j_k}^{i_k}. \quad *$$

Верно и обратное. Пусть $(T_{i_1 \dots i_k})$ — кососимметричный тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$. Тогда

$$T_{i_1 \dots i_k} \xi_1^{i_1} \dots \xi_k^{i_k}$$

— внешняя k -форма.

Пример. Положим в последнем выражении $k=n$. Как было установлено в предыдущем пункте, для попарно различных индексов i_1, \dots, i_n имеют место равенства

$$T_{i_1 \dots i_n} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} T_{12 \dots n}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} &= T_{12 \dots n} \sum_{(\sigma)} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} = \\ &= T_{12 \dots n} \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_n^1 & \dots & \xi_n^n \end{vmatrix}. \quad * \end{aligned}$$

Пусть φ — внешняя k -форма и ψ — внешняя l -форма. Тогда определена $(k+l)$ -форма

$(\varphi \otimes \psi)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_l) = \varphi(x_1, \dots, x_k) \cdot \psi(x_{k+1}, \dots, x_{k+l})$, которая внешней формой, вообще говоря, уже не является.

Однако если подвергнуть произведение $\varphi \otimes \psi$ процедуре альтернирования (сходной с операцией альтернирования, определенной для тензоров в пункте 1°), то форма, получаемая в результате, будет уже внешней.

Для k -линейной формы $a(x_1, \dots, x_k)$ альтернирование определяется так:

$$[a](x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{(\sigma)} \text{sign } \sigma a(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$$

Подвергнув форму $\varphi \otimes \psi$ этой процедуре, получим внешнюю $(k+l)$ -форму

$$\varphi \wedge \psi = [\varphi \otimes \psi].$$

Тем самым внешнее произведение внешних форм φ и ψ определяется так:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi)(x_1, \dots, x_{k+l}) &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{(\sigma)} \text{sign } \sigma \varphi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \times \\ &\times \psi(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{k+l}}). \end{aligned}$$

Ясно, что внешнее произведение форм является внешней формой.

Свойства внешнего умножения.

$$1^\circ. (\lambda\varphi) \wedge \psi = \varphi \wedge (\lambda\psi) = \lambda(\varphi \wedge \psi), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$2^\circ. (\varphi + \psi) \wedge \chi = \varphi \wedge \chi + \psi \wedge \chi.$$

$$3^\circ. \varphi \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \varphi.$$

* Равенство

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) \psi(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) = \psi(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) \varphi(x_1, \dots, x_k)$$

сохранится и после альтернирования

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) &= \\ &= (\psi \wedge \varphi)(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}, x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Переставляя местами аргументы в правой части, получим

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) &= \\ &= (-1)^{kl} (\psi \wedge \varphi)(x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}). \quad * \end{aligned}$$

$$4^\circ. (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi = \varphi \wedge (\psi \wedge \chi).$$

§ 3. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

1°. Метрическая структура линейного пространства

Пусть на векторах пространства V^n задана билинейная форма $g(x, y)$, симметричная, $g(y, x) = g(x, y)$, и невырожденная: для любого ненулевого вектора x можно указать вектор y , такой, что $g(x, y) \neq 0$.

Зафиксируем эту форму и положим

$$\langle x, y \rangle = g(x, y). \quad (1)$$

Тем самым каждой паре векторов x и y ставится в соответствие число $\langle x, y \rangle$, определяемое по правилу (1).

В случае, когда $g(x, y)$ — симметричная билинейная форма, полярная положительно определенной квадратичной форме, пространство V^n наделяется новой дополнительной структурой и превращается в евклидово пространство, в котором $\langle x, y \rangle$ представляет собой скалярное произведение векторов x и y .

Пусть e_1, \dots, e_n — базис пространства V^n . Рассмотрим совокупность компонент

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle.$$

Ясно, что $g = (g_{ij})$ — тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; при переходе к другому базису числа g_{ij} изменяются по правилу:

$$'g_{km} = g_{ij} \alpha_k^i \alpha_m^j.$$

Назовем тензор g (ковариантным) метрическим тензором или, кратко, метрикой.

Пример. Найдем закон преобразования $\det(g_{ij})$ при переходе к другому базису.

При изменении базиса числа g_{ij} преобразуются по правилу:

$$'g_{km} = g_{ij} \alpha_k^i \alpha_m^j.$$

Если считать номером строки в матрицах (g_{ij}) , (g'_{km}) первый индекс, в матрице (α_k^i) — нижний индекс, а в матрице (α_m^j) — верхний индекс, то это правило можно записать в матричной форме следующим образом:

$$('g_{km}) = (\alpha_k^i) \cdot (g_{ij}) \cdot (\alpha_m^j).$$

Так как при умножении матриц их определители также перемножаются и

$$\det(\alpha_k^i) = \det(\alpha_m^j),$$

то в результате получим

$$\det('g_{km}) = (\det(\alpha_k^i))^2 \det(g_{ij}). \quad *$$

Если

$$x = x^i e_i, \quad y = y^j e_j,$$

то

$$\langle x, y \rangle = g_{ij} x^i y^j.$$

Из курса линейной алгебры известно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Билинейная форма $g(x, y)$ невырождена в том и только в том случае, когда $\det(g_{ij}) \neq 0$.

Тем самым в любой координатной системе возможен переход от матрицы (g_{ij}) к обратной матрице. Обозначим компоненты обратной матрицы через g^{ij} .

Тогда

$$g_{ih}g^{hj} = \delta_i^j, \quad g^{jk}g_{ki} = \delta_i^j.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. (g^{ij}) — тензор типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, т. е.

$${}'g^{st} = g^{ij}\lambda_i^s\lambda_j^t \quad (2)$$

* Достаточно показать, что матрица ${}'g^{st}$, определяемая формулой (2), является обратной к матрице

$${}'g_{st} = g_{ij}\chi_s^i\chi_t^j.$$

Имеем

$$\begin{aligned} {}'g^{sm}{}'g_{mt} &= (g^{ij}\lambda_i^s\lambda_j^m)(g_{kl}\chi_m^k\chi_t^l) = g^{ij}g_{kl}\lambda_i^s\chi_t^l(\lambda_j^m\chi_m^k) = g^{ij}g_{kl}\lambda_i^s\chi_t^l\delta_j^k = \\ &= (g^{ij}g_{jl})\lambda_i^s\chi_t^l = \delta_i^s\lambda_i^s\chi_t^l = \lambda_i^s\chi_t^l = \delta_t^s. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется равенство

$${}'g_{tm}{}'g^{ms} = \delta_t^s. \quad *$$

Тензор g^{ij} называется *контравариантным метрическим тензором*.

2°. Опускание и поднятие индексов

В случае, когда в пространстве задана метрика, появляется возможность переводить ковариантные индексы в контравариантные и наоборот. Тем самым принципиальное различие между ними как бы исчезает.

Пусть $g = (g_{ij})$ — метрика пространства V^n . Рассмотрим тензор

$$T = (T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p})$$

типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, где $p \geq 1$. Тензор типа $\begin{pmatrix} p-1 \\ q+1 \end{pmatrix}$ можно построить по следующему правилу:

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = g_{i_k j_k} T_{i_1 \dots i_q}^{k j_1 \dots j_p}, \quad (3)$$

т. е. сверткой произведения метрического тензора g_{ij} и исходного тензора T .

Правило (3) называется *опусканием верхнего индекса* i_k .

Аналогично вводится правило *поднятия нижнего индекса* j_1 :

$$T_{i_2 \dots i_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = g^{i_1 k} T_{k i_2 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}. \quad (4)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если опустить индекс, а затем поднять его, то получится исходный тензор.

* Поднимая у тензора, стоящего в левой части формулы (1), индекс i_1 , получаем

$$g^{i_1 m} T_{m i_2 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = g^{i_1 m} g_{m k} T_{i_2 \dots i_q}^{k i_1 \dots i_p} = \delta_k^{i_1} T_{i_2 \dots i_q}^{k i_1 \dots i_p} = T_{i_2 \dots i_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}. *$$

Ясно, что опустить (поднять) можно любой верхний (нижний) индекс.

Примеры.

(1). Пусть $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ — обычное скалярное произведение. Компоненты тензора x^i типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ можно использовать как (контравариантные) координаты вектора

$$x = x^i e_i.$$

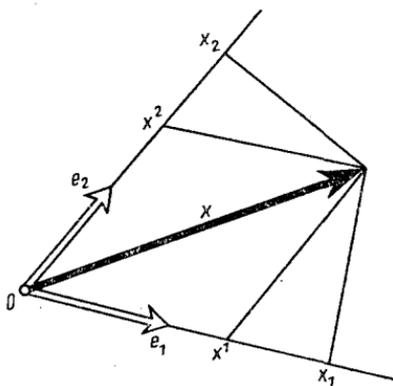


Рис. 1. Ковариантные и контравариантные координаты вектора

Опуская индекс, получаем

$$x_i = g_{ij} x^j = \langle e_i, e_j \rangle x^j = \langle e_i, x^j e_j \rangle = \langle e_i, x \rangle.$$

Таким образом, опускание индекса у координаты x^j вектора x приводит к скалярной проекции этого вектора на вектор базиса. Это *ковариантная* координата вектора x (рис. 1).

Заметим, что

$$\langle x, y \rangle = g_{ij} x^i y^j = g^{ij} x_i y_j.$$

(2) Тензор $A = (A_j^i)$ типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ можно рассматривать как линейный оператор в пространстве V^n . Если задана метрика g_{ij} , то верхний индекс можно опустить:

$$A_{ij} = g_{ik} A_j^k.$$

Тем самым получается тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, определяющий билинейную форму

$$A(x, y) = A_{ij} x^i y^j = x^i g_{ik} A_j^k y^j = \langle x, Ay \rangle.$$

Обратно: поднятием индекса у тензора типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ можно построить линейный оператор. *

Мы уже отмечали, что место индексов (вверху или внизу) и порядок их расположения при задании тензора существенны. Поэтому при проведении операции опускания (или поднятия) индекса возникает естественный вопрос: на какое место следует поставить опускаемый индекс? Обычно поступают так: места индексов, верхних и нижних, нумеруются в совокупности.

Рассмотрим, например, тензор типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, (T_{ij}^{kl}) и занумеруем его индексы следующим образом: 1-й индекс — ковариантный, 2-й и 3-й — контравариантные, 4-й — ковариантный. Это можно записать так:

$$T_{i..j}^{..kl}.$$

Таким образом, если 2-й индекс стоит вверху, то 2-е место снизу остается пустым. Тогда, поднимая или опуская индекс, мы ставим его на заготовленное свободное место. Опуская, например, 3-й индекс, получаем

$$T_{i..j}^{..k..} = g_{lm} T_{i..j}^{..klm}.$$

Б. АФФИННОЕ (ТОЧЕЧНОЕ) ПРОСТРАНСТВО

§ 4. ТЕНЗОРЫ В ТОЧЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В предыдущих параграфах этой главы мы ввели понятие тензора и рассмотрели некоторые свойства тензоров в n -мерном линейном пространстве. В практических задачах чаще приходится иметь дело с пространствами несколько иной природы — аффинными, или точечными, пространствами. Поэтому представляется естественным обобщить понятие тензора на случай точечных пространств.

1°. Точечное пространство

Начнем с примера.

Из курса аналитической геометрии известно, как упорядоченная пара точек трехмерного пространства определяет направленный отрезок, а вслед за ним и вектор. При этом от любой точки пространства можно заданный вектор отложить. Векторы можно складывать и умножать на произвольные числа. Множество всех векторов образует трехмерное линейное (векторное) пространство.

Таким образом, отправляясь от пространства, элементами которого являются точки, мы строим новое пространство, элементами которого являются векторы. Заметим это.

Рассмотрим непустое множество A , элементы которого будем называть *точками* и обозначать прописными латинскими буквами M, N, O, P, Q, R, \dots . Каждой упорядоченной паре точек M и N поставим в соответствие вектор r из линейного пространства V^n .

Обозначение: $r = \overrightarrow{MN}$.

Точка M называется *началом* вектора \overrightarrow{MN} , а точка N — *концом* вектора \overrightarrow{MN} .

Потребуем выполнения следующих условий.

1. Для любой точки O из множества A и любого вектора r из пространства V^n можно указать единственную точку M , такую, что $r = \overrightarrow{OM}$; если точка O фиксирована, то тем самым между векторами из пространства V^n и точками из множества A устанавливается взаимно однозначное соответствие.

2. Для любых трех точек P, Q, R выполняется равенство (рис. 2)

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \vec{0}.$$

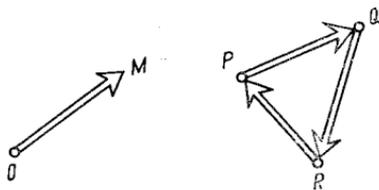


Рис. 2. Аксиомы точечного пространства

Тогда множество A называется *n -мерным аффинным, или точечным, пространством* и обозначается так: A^n .

Ясно, что пространство, изучаемое в курсе аналитической геометрии, удовлетворяет этим условиям ($n=3$).

2°. Аффинные координаты

Определение. *Координатным репером* в пространстве A^n называется совокупность

$$\{O; e_1, \dots, e_n\},$$

составленная из некоторой точки O пространства A^n и базиса e_1, \dots, e_n

пространства V^n .

Выбор точки отсчета O позволяет связать каждую точку M пространства A^n с ее радиус-вектором \vec{OM} .

Разложим вектор \vec{OM} по базису e_1, \dots, e_n :

$$\vec{OM} = \sum_{i=1}^n x^i e_i. \quad (1)$$

Аффинными координатами точки M относительно заданного репера $\{O; e_1, \dots, e_n\}$ будем называть координаты x^1, \dots, x^n ее радиус-вектора \vec{OM} (рис. 3).

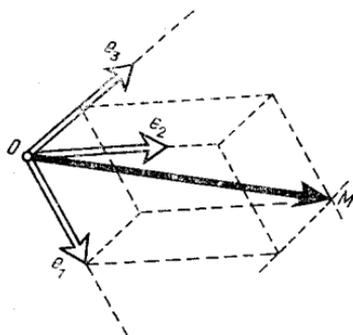


Рис. 3. Координатный репер

По предложенному выше правилу каждой точке пространства A^n ставится во взаимно однозначное соответствие упорядоченный набор чисел — координаты этой точки.

Таким образом, заданием координатного репера в пространстве A^n вводится система координат — аффинная координатная система.

Рассмотрим в пространстве A^n другой координатный репер $\{O; f_1, \dots, f_n\}$. Раскладывая радиус-вектор \vec{OM} той же точки M по базису f_1, \dots, f_n —

$$\vec{OM} = \sum_{k=1}^n y^k f_k, \quad (2)$$

находим ее координаты y^1, \dots, y^n в координатной системе, определяемой репером $\{O; f_1, \dots, f_n\}$.

Построим формулы, связывающие координаты x^1, \dots, x^n и y^1, \dots, y^n произвольной точки M .

Пусть

$$f_k = \sum_{i=1}^n \alpha_k^i e_i \quad (k=1, \dots, n).$$

Из формул (1) и (2) получаем, что

$$\sum_{i=1}^n x^i e_i = \sum_{k=1}^n y^k f_k \quad (3)$$

и, далее,

$$\sum_{i=1}^n x^i e_i = \sum_{k=1}^n y^k \sum_{i=1}^n \kappa_k^i e_i.$$

В силу единственности разложения вектора по базису отсюда вытекает, что

$$x^i = \sum_{k=1}^n \kappa_k^i y^k \quad (i=1, \dots, n). \quad (4)$$

Аналогичным рассуждением, выражая векторы e_i через векторы f_k —

$$e_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}^k f_k \quad (i=1, \dots, n),$$

из равенства (3) получаем, что

$$y^k = \sum_{i=1}^n \lambda_{ik}^k x^i \quad (k=1, \dots, n). \quad (5)$$

Напомним, что элементы матриц (κ_k^i) и (λ_{ik}^k) связаны соотношением

$$\sum_{j=1}^n \kappa_k^j \lambda_{jk}^m = \sum_{i=1}^n \lambda_{ik}^i \kappa_i^m = \delta_k^m,$$

где δ_k^m — символ Кронекера.

Таким образом, при переходе от координатной системы, определяемой репером $\{O; e_1, \dots, e_n\}$, к координатной системе, определяемой репером $\{O; f_1, \dots, f_n\}$, координаты произвольной точки M преобразуются так же, как и координаты ее радиуса-вектора, т. е. по правилу (4) или равносильному ему правилу (5).

З а м е ч а н и е. Если при переходе от одной координатной системы к другой начало отсчета изменяется, то координаты точки M преобразуются так:

$$y^k = \sum_{i=1}^n \lambda_{ik}^k x^i + \beta^k, \quad (k=1, \dots, n), \quad x^i = \sum_{k=1}^n \kappa_k^i y^k + \alpha^i \quad (i=1, \dots, n)$$

(здесь $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ и β^1, \dots, β^n — координаты точки начала отсчета одной координатной системы относительно другой).

3°. Тензоры в точечном пространстве

Введем понятие тензора в n -мерном точечном пространстве.

Определение. Будем говорить, что в n -мерном точечном пространстве A^n задан тензор T типа $\binom{p}{q}$, если:

1) для каждого координатного репера $\{O; e_1, \dots, e_n\}$ указывается упорядоченный набор n^{p+q} чисел

$$T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}, \quad 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_p \leq n, \\ 1 \leq j_1 \leq n, \dots, 1 \leq j_q \leq n,$$

— компонент (координат) тензора (относительно координатной системы, определяемой репером $\{O; e_1, \dots, e_n\}$);

2) для набора компонент

$$T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}, \quad 1 \leq k_1 \leq n, \dots, 1 \leq k_p \leq n, \\ 1 \leq l_1 \leq n, \dots, 1 \leq l_q \leq n,$$

тензора T относительно координатной системы, определяемой репером $\{O; f_1, \dots, f_n\}$, справедливо представление

$$T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} = T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \lambda_{i_1}^{k_1} \dots \lambda_{i_p}^{k_p} \kappa_{l_1}^{i_1} \dots \kappa_{l_q}^{i_q}$$

— закон преобразования компонент тензора T .

Сравнивая данное определение с определением тензора в линейном пространстве (пункт 1° § 1), замечаем, что первое может быть получено из второго формальной заменой слова «базис» на слова «координатный репер». Поэтому, хотя тензор и определен теперь в более общей ситуации, совсем просто убедиться в том, что все ранее введенные понятия и операции переносятся на случай точечного пространства, а все доказанные ранее утверждения остаются в силе. Это относится и к корректности определения (способа введения) тензора, и к алгебраическим операциям над тензорами, и т. п.

Остановимся коротко на том, как определяется метрическая структура точечного пространства.

На векторах пространства A^n (т. е. на векторах связанного с ним линейного пространства V^n) задается симметричная невырожденная билинейная форма $g(x, y)$, при помощи которой вводится скалярное произведение векторов

$$\langle x, y \rangle = g(x, y).$$

Тем самым точечное пространство A^n наделяется новой, дополнительной структурой.

В случае, когда $g(x, x)$ — положительно определенная квадратичная форма, A^n превращается в евклидово точечное пространство.

§ 5. ТЕНЗОРНОЕ ПОЛЕ

Значительный интерес представляет случай, когда тензор изменяется от точки к точке.

Определение. Будем говорить, что в n -мерном точечном пространстве A^n задано поле тензора $T = (T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p})$ типа $\binom{p}{q}$, или тензорное поле, если в каждой точке M этого пространства задан определенный тензор типа $\binom{p}{q}$:

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(M). \quad (1)$$

Отметим, что тензорное поле может быть задано и не во всем пространстве, а только на некотором его подмножестве.

Если в пространстве A^n введена координатная система, то формулу (1) можно записать так:

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(x^1, \dots, x^n),$$

где x^1, \dots, x^n — координаты точки M .

Все введенные выше операции тензорной алгебры легко переносятся на случай тензорных полей.

Алгебраические операции над тензорными полями определяются как операции над тензорами этих полей, производимые отдельно в каждой точке M области задания.

Например, складывая тензорные поля

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(M) \text{ и } S_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(M)$$

одного типа в каждой точке M их общей области задания, получаем

$$U_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(M) = T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(M) + S_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(M).$$

Ясно, что в результате этой операции вновь получается тензорное поле того же типа.

Подобным же образом на тензорных полях вводятся операции умножения, транспонирования и свертывания, поднятия и опускания индексов и др.

§ 6. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

В приложениях часто возникают задачи, в которых более удобными оказываются не рассматриваемые до сих пор прямолинейные координатные системы, а криволинейные. Для того чтобы в таких задачах можно было эффективно пользоваться разрабатываемым здесь тензорным аппаратом, необходимо вновь обобщить само понятие тензора с сохранением возможно большего числа установленных свойств (лучше — всех!).

Предварительно целесообразно расширить класс допустимых координатных систем.

1°. Криволинейные координаты в точечном пространстве

Предположим, что в n -мерном точечном пространстве A^n введена аффинная (прямолинейная) координатная система и x^1, \dots, x^n — аффинные координаты. Пусть X — некоторая (открытая) область в этом пространстве.

Будем говорить, что функция

$$u = \varphi(x^1, \dots, x^n),$$

заданная в области X , является в области X k -гладкой (принадлежит классу C^k), если она имеет в этой области непрерывные частные производные до порядка k включительно ($k \geq 1$).

Если функция $u = \varphi(x^1, \dots, x^n)$ имеет в области X непрерывные частные производные всех порядков, то она называется бесконечно дифференцируемой (принадлежащей классу C^∞).

Рассмотрим набор n гладких функций

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n = y^n(x^1, \dots, x^n), \quad (1)$$

задающих взаимно однозначное отображение области X на некоторую область Y изменения переменных y_1, \dots, y_n (рис. 4).

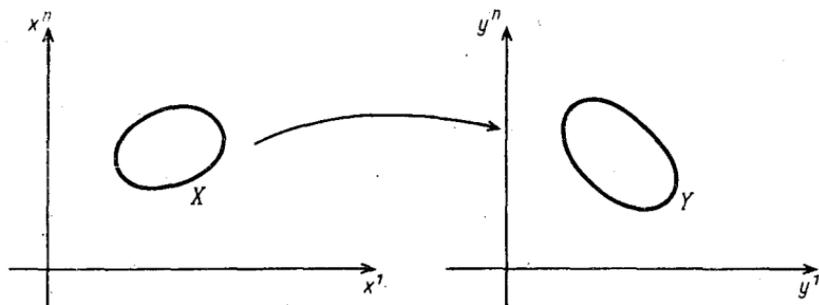


Рис. 4. Криволинейные координатные системы

Потребуем (достаточно считать, что функции $y^i(x^1, \dots, x^n)$, $i=1, \dots, n$, принадлежат в области X классу C^1), чтобы определитель матрицы

$$J_{x \rightarrow y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

составленной из частных производных функций $y^k(x^1, \dots, x^n)$, был отличен от нуля. Этот определитель, $\det J_{x \rightarrow y}$, называется якобианом отображения, заданного функциями (1).

Определение. Будем говорить, что в области X введена *криволинейная координатная система*, если задан набор гладких функций (1), обладающий указанными выше свойствами гладкости, взаимной однозначности и невырожденности (необращения в нуль якобиана).

Обозначение: $(y) = (y^1, \dots, y^n)$.

Переменные y^1, \dots, y^n называются *криволинейными координатами*.

Аффинные координаты x^1, \dots, x^n часто называют *прямолинейными координатами*.

Пример. Рассмотрим в положительном октанте

$$X = \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$$

набор функций

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Легко убедиться в том, что они гладкие, задают взаимно однозначное отображение положительного октанта X на «четверть» слоя

$$Y = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, z > 0 \right\}$$

и

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0.$$

Построенные криволинейные координаты называются *цилиндрическими координатами* (рис. 5).

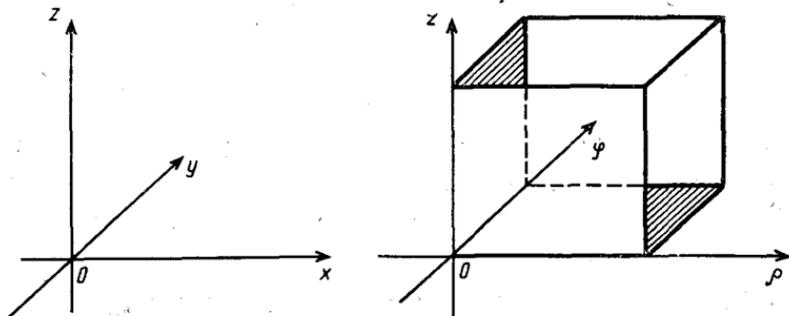


Рис. 5. Цилиндрические координаты

Важное замечание. Из того, что якобиан $\det J_{x \rightarrow y}$ отображения, задаваемого функциями (1), отличен от нуля во всех точках области X , вытекает, что отображение

$$x^1 = x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n = x^n(y^1, \dots, y^n), \quad (2)$$

обратное к заданному, является гладким в соответствующей области Y изменения переменных y^1, \dots, y^n .

Продифференцируем тождества

$$y^k = y^k(x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)) \quad (k=1, \dots, n)$$

по y^j ($j=1, \dots, n$). Согласно правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial y^k}{\partial y^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \quad (k, j=1, \dots, n).$$

Так как

$$\frac{\partial y^k}{\partial y^j} = \delta_j^k,$$

то

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \delta_j^k \quad (k, j=1, \dots, n).$$

Полученные равенства можно переписать в матричном виде

$$J_{x \rightarrow y} \cdot J_{y \rightarrow x} = I,$$

где I — единичная матрица.

Тем самым

$$J_{y \rightarrow x} = J_{x \rightarrow y}^{-1}$$

и, значит,

$$\det J_{y \rightarrow x} = \frac{1}{\det J_{x \rightarrow y}} \neq 0.$$

Таким образом, переход (2) от криволинейной системы координат $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ к исходной прямолинейной $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ удовлетворяет тем же условиям гладкости, взаимной однозначности и невырожденности (якобиан не равен нулю), что и переход (1) от прямолинейных координат $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ к криволинейным $(y) = (y^1, \dots, y^n)$.

Пусть $(z) = (z^1, \dots, z^n)$ — другая криволинейная координатная система в области X и

$$z^1 = z^1(x^1, \dots, x^n), \dots, z^n = z^n(x^1, \dots, x^n). \quad (3)$$

Соответствующую область изменения переменных z^1, \dots, z^n обозначим через Z .

Посредством формул (1) и (3) каждой точке M из области X поставлены в соответствие два набора ее криволинейных координат y^1, \dots, y^n и z^1, \dots, z^n .

Тем самым между областями Y и Z устанавливается соответствие. Это соответствие является взаимно однозначным. Функции

$$z^j = z^j(x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)) \quad (j=1, \dots, n) \quad (4)$$

гладко зависят от переменных y^1, \dots, y^n .

Покажем, что определитель матрицы

$$J_{y \rightarrow z} = \left(\frac{\partial z^j}{\partial y^k} \right)$$

отличен от нуля.

Согласно правилу дифференцирования сложной функции из соотношений (4) получаем

$$\frac{\partial z^j}{\partial y^k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \quad (j, k=1, \dots, n).$$

Запишем эти n^2 соотношений в матричном виде. Имеем

$$J_{y \rightarrow z} = J_{x \rightarrow z} \cdot J_{y \rightarrow x}.$$

Так как

$$J_{y \rightarrow x} = J_{x \rightarrow y}^{-1},$$

то отсюда следует, что

$$\det J_{y \rightarrow z} = \frac{\det J_{x \rightarrow z}}{\det J_{x \rightarrow y}} \neq 0.$$

Таким образом, переход (в области X) от одной криволинейной системы координат $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ к другой $(z) = (z^1, \dots, z^n)$ удовлетворяет тем же условиям гладкости, взаимной однозначности и невырожденности (необращения в нуль якобиана), что и переход от прямолинейных координат $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ к криволинейным $(y) = (y^1, \dots, y^n)$.

Укажем достаточное условие того, чтобы система гладких функций

$$y^k = y^k(x^1, \dots, x^n) \quad (k=1, \dots, n) \quad (5)$$

задавала криволинейную координатную систему.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть

$$\det J_{x \rightarrow y} \neq 0$$

всюду в области X . Тогда у каждой точки M из области X существует открытая окрестность, в которой набор функций (5) задает (локальную) криволинейную координатную систему.

Этот факт, известный как теорема о неявной функции, доказывается в курсе математического анализа.

Пользуясь формулами (2), заменим координаты x^i в разложении

$$\overrightarrow{OM} = x^i e_i$$

радиус-вектора точки M . В результате получим формулу, выражающую радиус-вектор $r = \overrightarrow{OM}$ произвольной точки M из области X через ее координаты y^1, \dots, y^n :

$$r = x^i(y^1, \dots, y^n) e_i, \quad (6)$$

или, короче,

$$r = r(y^1, \dots, y^n).$$

Продифференцируем равенство (6) по переменной y^k :

$$\frac{\partial r}{\partial y^k} = \frac{\partial x^1}{\partial y^k} e_1 + \dots + \frac{\partial x^n}{\partial y^k} e_n \quad (k=1, \dots, n).$$

Совокупность векторов

$$\frac{\partial r}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial y^n}$$

линейно независима. Это следует из того, что определитель матрицы, составленной из координат этих векторов в базисе e_1, \dots, e_n —

$$J_{y \rightarrow x} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right), \text{ —}$$

отличен от нуля.

2°. Тензоры в криволинейных координатах

Рассмотрим область X пространства A^n , в которой введена система криволинейных координат $(x) = (x^1, \dots, x^n)$.

С криволинейной координатной системой естественно связаны кривые, называемые *координатными кривыми* или *координатными линиями*.

Координатные линии определяются так: i -я координатная линия (i -линия) — это кривая, вдоль которой изменяется лишь одна из координат — x^i ; все координаты, кроме i -й, остаются неизменными.

Например, в случае цилиндрических координат φ -линия —

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \quad \varphi, \quad z = z_0 = \text{const}$$

— дуга окружности (рис. 6).

Все координатные линии аффинной системы координат являются прямыми.

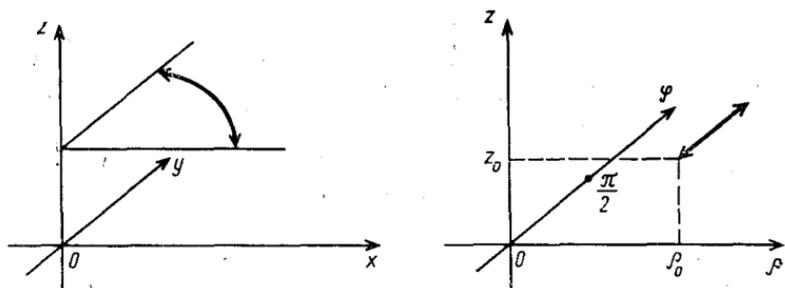


Рис. 6. Открытой дуге соответствует интервал

Последовательно полагая i равным $1, \dots, n$, получаем, что через каждую точку M области X проходят n гладких кривых — координатных линий заданной системы координат (рис. 7).

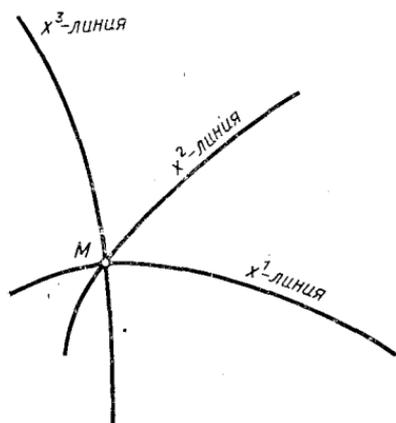


Рис. 7. Координатные линии

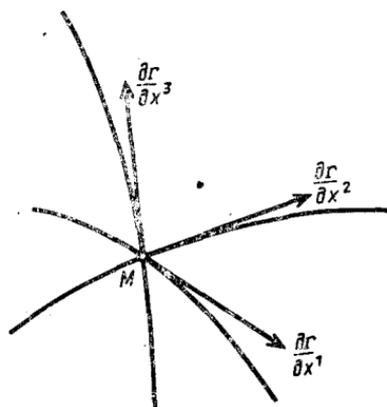


Рис. 8. Координатный репер

Радиус-вектор r точки M можно записать так:

$$r = r(x^1, \dots, x^n).$$

Частная производная $\frac{\partial r}{\partial x^i}$ вектора-функции $r = r(x^1, \dots, x^n)$, вычисленная в точке M , является касательным вектором к i -й координатной линии — x^i -линии. Так как векторы

$$\frac{\partial r}{\partial x^1}(M), \dots, \frac{\partial r}{\partial x^n}(M)$$

линейно независимы, то в каждой точке M можно рассматривать координатный репер

$$\left\{ M; \frac{\partial r}{\partial x^1}(M), \dots, \frac{\partial r}{\partial x^n}(M) \right\}.$$

Тем самым задание в области X криволинейных координат влечет естественное появление в каждой точке M из области X вполне определенного координатного репера $\left\{M; \frac{\partial r}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x^n}\right\}$ (рис. 8).

При переходе к другим криволинейным координатам $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ в точке M возникает другой координатный репер $\left\{M; \frac{\partial r}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial y^n}\right\}$.

Вспользуемся тем, что в некоторой окрестности точки M координаты x^1, \dots, x^n можно выразить через координаты y^1, \dots, y^n посредством гладких функций

$$x^1 = x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n = x^n(y^1, \dots, y^n).$$

Тогда для векторов рассматриваемых реперов выполняются соотношения

$$\frac{\partial r}{\partial y^k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \quad (k=1, \dots, n).$$

Подчеркнем, что все величины, входящие в эти равенства, вычисляются в точке M .

Сравним полученные формулы с соотношениями

$$f_k = \sum_{i=1}^n \kappa_k^i e_i \quad (k=1, \dots, n),$$

связывающими базисные векторы двух аффинных координатных реперов (см. § 4, 2°. Аффинные координаты). Полагая

$$e_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}, \quad f_k = \frac{\partial r}{\partial y^k} \quad (i, k=1, \dots, n),$$

получаем, что

$$f_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k} e_i$$

и, значит,

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \kappa_k^i \quad (i, k=1, \dots, n).$$

Поменяв в приведенных рассуждениях (x) и (y) местами, получим соответственно

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \quad (i=1, \dots, n)$$

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \lambda_i^k \quad (i, k=1, \dots, n).$$

Подмеченная аналогия позволяет дать новое, более общее определение тензора (тензорного поля) применительно к произвольным криволинейным координатам.

Определение. Тензорным полем типа $\binom{p}{q}$ называется геометрический объект, задаваемый в каждой криволинейной системе координат $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ набором n^{p+q} гладких функций

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(x^1, \dots, x^n), \quad 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_p \leq n, \\ 1 \leq j_1 \leq n, \dots, 1 \leq j_q \leq n,$$

преобразующихся при переходе к другой координатной системе $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ по следующему правилу:

$$T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} = T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{j_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}},$$

$$1 \leq k_1 \leq n, \dots, 1 \leq k_p \leq n, 1 \leq l_1 \leq n, \dots, 1 \leq l_q \leq n.$$

— тензорному закону типа $\binom{p}{q}$.

Отметим, что вычисление величин, расположенных в обеих частях каждого из n^{p+q} равенств, каждый раз проводится в одних и тех же точках.

Нетрудно проверить, что все введенные выше понятия и установленные ранее факты переносятся на этот более общий случай.

Остановимся, например, на описании удобного на практике способа задания тензора и обосновании его корректности.

3°. О способе задания тензорного поля

Для того чтобы задать тензорное поле (во всем пространстве или в некоторой области), часто пользуются следующим приемом: указываются тип тензорного поля и его компоненты относительно какой-то одной координатной системы.

Такой способ задания тензорного поля удобен.

Покажем, что он является вполне корректным.

* Пусть, например, в некоторой области X пространства введена система координат $(x) = (x^1, \dots, x^n)$. Набор n^{p+q} гладких функций

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(x^1, \dots, x^n), \quad 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_p \leq n, \\ 1 \leq j_1 \leq n, \dots, 1 \leq j_q \leq n,$$

будем рассматривать как совокупность компонент тензорного поля типа $\binom{p}{q}$ относительно этой координатной системы.

Укажем сначала, как строятся компоненты поля относительно любой другой координатной системы.

Пусть $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ — произвольная координатная система в области X . Компоненты

$${}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p}(y^1, \dots, y^n), \quad 1 \leq k_1 \leq n, \dots, 1 \leq k_p \leq n, \\ 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_q \leq n,$$

определим по следующему правилу:

$${}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{j_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{i_q}} \quad (1)$$

(здесь все величины вычислены в одной и той же произвольно выбранной точке M области X).

Чтобы убедиться в том, что тем самым в области X действительно построено тензорное поле типа $\binom{p}{q}$, достаточно проверить, является ли тензорным закон преобразования компонент при переходе от одной произвольной системы координат к другой, тоже произвольной.

Пусть $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ и $(z) = (z^1, \dots, z^n)$ — две любые координатные системы в области X . Компоненты ${}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p}$ относительно координатной системы (y) определяются по формуле (1), а компоненты ${}''T_{s_1 \dots s_q}^{r_1 \dots r_p}$ относительно координатной системы (z) — по следующему, аналогичному, правилу

$${}''T_{s_1 \dots s_q}^{r_1 \dots r_p} = T_{i_1 \dots i_q}^{m_1 \dots m_p} \frac{\partial z^{r_1}}{\partial x^{m_1}} \dots \frac{\partial z^{r_p}}{\partial x^{m_p}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{s_1}} \dots \frac{\partial x^{i_q}}{\partial z^{s_q}} \quad (2)$$

Покажем, что тензорный характер приведенного закона преобразования сохранится и при переходе от компонент ${}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p}$ к компонентам ${}''T_{s_1 \dots s_q}^{r_1 \dots r_p}$.

Выразим сначала компоненты $T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}$ через ${}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p}$ (ср. § 1, 1°. Определение тензора). Умножая обе части формулы (1) на величину

$$\frac{\partial x^{m_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{m_p}}{\partial y^{k_p}} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_q}}{\partial x^{j_q}}$$

и суммируя по $k_1, \dots, k_p, i_1, \dots, i_q$ от 1 до n , получим

$${}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{m_p}}{\partial y^{k_p}} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_q}}{\partial x^{j_q}} =$$

$$= T_{i_1 \dots i_p}^{i_1 \dots i_p} \left(\frac{\partial x^{m_1}}{\partial y^{k_1}} \cdot \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{l_1}} \right) \dots \left(\frac{\partial x^{m_p}}{\partial y^{k_p}} \cdot \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{l_p}} \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{l_1}} \cdot \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{l_1}} \right) \dots \left(\frac{\partial x^{l_p}}{\partial y^{l_p}} \cdot \frac{\partial y^{l_p}}{\partial x^{l_p}} \right).$$

Так как

$$\frac{\partial x^m}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^l} = \frac{\partial x^m}{\partial x^l} = \delta_l^m, \\ \frac{\partial x^l}{\partial y^l} \cdot \frac{\partial y^l}{\partial x^l} = \frac{\partial x^l}{\partial x^l} = \delta_l^l,$$

то из последней формулы вытекает, что

$$T_{i_1 \dots i_q}^{m_1 \dots m_p} = {}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{m_p}}{\partial y^{k_p}} \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{l_1}} \dots \frac{\partial y^{l_q}}{\partial x^{l_q}}. \quad (3)$$

Прежде чем подставлять полученное для $T_{i_1 \dots i_q}^{m_1 \dots m_p}$ выражение в формулу (2), заметим, что

$$\frac{\partial z^r}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial y^k} = \frac{\partial z^r}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial y^l}{\partial x^t} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial z^s} = \frac{\partial y^l}{\partial z^s}.$$

Теперь уже нетрудно подсчитать, что

$${}''T_{s_1 \dots s_q}^{r_1 \dots r_p} = {}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \left(\frac{\partial z^{r_1}}{\partial x^{m_1}} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial y^{k_1}} \right) \dots \\ \dots \left(\frac{\partial z^{r_p}}{\partial x^{m_p}} \frac{\partial x^{m_p}}{\partial y^{k_p}} \right) \cdot \left(\frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{t_1}} \frac{\partial x^{t_1}}{\partial z^{s_1}} \right) \dots \left(\frac{\partial y^{l_q}}{\partial x^{t_q}} \frac{\partial x^{t_q}}{\partial z^{s_q}} \right) = \\ = {}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial z^{r_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial z^{r_p}}{\partial y^{k_p}} \frac{\partial y^{l_1}}{\partial z^{s_1}} \dots \frac{\partial y^{l_q}}{\partial z^{s_q}}. *$$

Пример. Пусть

$$T = (T_{i_1 \dots i_n})$$

— ковариантный кососимметричный тензор. Если среди индексов j_1, \dots, j_n компоненты $T_{i_1 \dots i_n}$ есть повторяющиеся, то эта компонента равна нулю. Если же индексы j_1, \dots, j_n попарно различны, то

$$T_{i_1 \dots i_n} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} T_{12 \dots n}.$$

Кососимметричные тензоры типа $\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$, где n — размерность пространства, при замене координат

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n,$$

преобразуются по правилу

$${}'T_{12\dots n} = T_{12\dots n} \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right).$$

В самом деле, по определению имеем

$$\begin{aligned} {}'T_{12\dots n} &= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^1} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^n} T_{i_1 \dots i_n} = \\ &= \left(\sum_{(\sigma)} \text{sign } \sigma \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^1} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^n} \right) T_{12\dots n} = \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right) T_{12\dots n}. * \end{aligned}$$

§ 7. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР В ТОЧЕЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1°. Метрический тензор в криволинейных координатах

Как уже отмечалось выше (см. § 4), евклидово пространство получается из точечного при помощи дополнительного введения метрики. Введение метрики сводится к заданию дважды ковариантного метрического тензора g , компоненты g_{ij} которого относительно произвольного координатного репера $\{O; e_1, \dots, e_n\}$ вычисляются по формуле

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle.$$

Рассматривая тензор в криволинейных координатах $(x) = (x^1, \dots, x^n)$, естественно относить его в каждой точке M к соответствующему локальному реперу

$$\left\{ M; \frac{\partial r}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x^n} \right\},$$

где $r = r(x^1, \dots, x^n)$ — радиус-вектор точки M . Тогда компоненты g_{ij} метрического тензора g будут связаны с векторами $\frac{\partial r}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x^n}$ следующими формулами:

$$g_{ij}(M) = \left\langle \frac{\partial r}{\partial x^i}(M), \frac{\partial r}{\partial x^j}(M) \right\rangle. \quad (1)$$

Из формул (1) видно, что компоненты метрического тензора являются функциями точки

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n) \quad (2)$$

и при переходе к новым криволинейным координатам $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ изменяются по тензорному закону типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$${}'g_{km} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^m}. \quad (3)$$

Отсюда, в частности, вытекает закон преобразования $\det(g_{ij})$:

$$\det({}'g_{km}) = \left(\det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right) \right)^2 \det(g_{ij}).$$

Остановимся на формулах (2) подробнее.

Напомним, что задание метрики (метрического тензора) в точном пространстве производится следующим образом. Во всем пространстве в некоторой прямолинейной координатной системе вводится набор n^2 чисел g_{ij} , обладающий свойствами

1) симметричности, $g_{ji} = g_{ij}$,

и

2) невырожденности, $\det(g_{ij}) \neq 0$;

компоненты $'g_{km}$ относительно любой другой прямолинейной координатной системы вычисляются по тензорному закону типа

(0)
(2). Подчеркнем, что в каждой точке пространства тензор g один и тот же, т. е. компоненты тензора g относительно рассматриваемой координатной системы одни и те же в каждой точке.

В то же время, рассматривая компоненты этого постоянного тензора g относительно произвольной криволинейной координатной системы, мы получаем согласно формуле (2), что каждая его компонента от точки к точке изменяется. И значит, постоянный тензор $g = (g_{ij})$ в криволинейных координатах будет восприниматься как тензорное поле.

Пример 1. Если компоненты метрического тензора g_{ij} трехмерного пространства в прямоугольной декартовой системе координат записать в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то при переходе к цилиндрическим координатам ρ, φ, z получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а к сферическим r, ψ, Θ —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \Theta \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть метрический тензор задан в прямоугольной декартовой системе координат $(y) = (y^1, \dots, y^n)$. Тогда все его компоненты определяются так:

$$'g_{km} = \delta_{km}.$$

При переходе к криволинейным координатам $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ имеем

$$g_{ij} = g_{km} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^m}{\partial x^j} = \delta_{km} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^m}{\partial x^j},$$

откуда

$$\det(g_{ij}) = \left(\det \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) \right)^2. *$$

Совсем просто проверить, что все ранее установленные факты тензорной алгебры, связанные с метрическим тензором (поднятие и опускание индексов и др.), переносятся на рассматриваемый случай криволинейных координат.

2°. Длина дуги гладкой кривой

Будем считать, что евклидова структура в пространстве A^n вводится посредством положительно определенного метрического тензора g , заданного в криволинейных координатах $(x) = (x^1, \dots, x^n)$:

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n).$$

Положительная определенность метрического тензора означает, что для любого ненулевого набора чисел ξ^1, \dots, ξ^n в каждой точке M выполняется неравенство

$$g_{ij}(M) \xi^i \xi^j > 0.$$

Это свойство сохраняется при переходе к любой другой координатной системе.

Из положительной определенности метрического тензора, в частности, следует, что

$$\det(g_{ij}) > 0.$$

Рассмотрим некоторые свойства евклидова пространства, основываясь на таком способе задания метрического тензора.

Обратимся к вычислению длины дуги кривой.

Пусть

$$x^i = x^i(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (i=1, \dots, n)$$

— параметрические уравнения гладкой кривой γ . Радиус-вектор $r = r(x^1, \dots, x^n)$ произвольной точки M кривой γ является функцией параметра t :

$$r = r(t) = r(x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

Для касательного вектора dr/dt к кривой γ в точке M справедливо разложение (рис. 9)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}.$$

Аналогично, рассматривая вдоль кривой γ дифференциал dr радиус-вектора при бесконечно малом смещении вдоль γ , получаем

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x^i} dx^i.$$

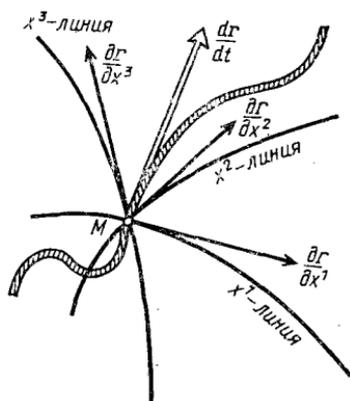


Рис. 9. Касательный вектор кривой и координатный репер

Вычислим скалярные квадраты этих векторов. С учетом формул (1) имеем

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left\langle \frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial r}{\partial x^i}, \frac{\partial r}{\partial x^j} \right\rangle \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt},$$

$$dr^2 = \langle dr, dr \rangle = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Длина дуги кривой γ между точками $M_0(t_0)$ и $M_1(t_1)$ определяется формулой

$$s = s(\widetilde{M_0 M_1}) = \int_{\widetilde{M_0 M_1}} |dr| = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{dr}{dt} \right| dt$$

и, значит,

$$s = \int_{\widetilde{M_0 M_1}} \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt. \quad (4)$$

Таким образом, если в области X в криволинейных координатах $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ задан метрический тензор $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$, то длину произвольной гладкой кривой можно находить по одной из формул (4). Функции $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ вычисляются здесь на кривой γ и, значит, зависят от t .

Из формулы (4) вытекает, что

$$ds = |dr| = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

или, что то же самое,

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, \dots, x^n) dx^i dx^j. \quad (5)$$

Тем самым квадрат дифференциала длины дуги при произвольном бесконечно малом смещении по любой кривой есть квадратичная форма от дифференциалов dx^i криволинейных координат — дифференциальная квадратичная форма.

З а м е ч а н и е. Вид квадратичной формы (5) инвариантен относительно преобразований криволинейных координат. Это легко вытекает из закона преобразования (3) ее коэффициентов и формулы для дифференциалов

$$dx^i = dy^k \frac{\partial x^i}{\partial y^k}. \quad (6)$$

Важное замечание. По самому способу задания метрического тензора ясно, что, переходя к прямолинейным координатам, мы получим, что все его компоненты постоянны, т. е. не изменяются от точки к точке. Если же просто задать тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, никак не связывая его с геометрией самого пространства, а лишь подчинив требованиям симметричности и невырожденности (положительной определенности), то при переходе к прямолинейной системе координат такого эффекта может и не наблюдаться.

Пусть в области изменения переменных x^1, \dots, x^n заданы n^2 функций $g_{ij} = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$, таких, что $g_{ij} = g_{ji}$ и $\det(g_{ij}) \neq 0$.

Сформулируем следующий вопрос.

Существует ли в точечном пространстве A^n область X , в которой x^1, \dots, x^n можно принять за криволинейные координаты, потребовав дополнительно, чтобы функции $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ были компонентами метрического тензора относительно этой координатной системы, другими словами, чтобы при переходе в этой области к прямолинейным координатам компоненты тензора g стали постоянными?

В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен.

В дальнейшем (см. § 2 главы 4) мы установим содержательные условия на дважды ковариантный симметричный невырожденный (положительно определенный) тензор, выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы этот тензор был метрическим тензором точечного евклидова пространства. Другими словами, будут сформулированы необходимые и достаточные условия на функции $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$, при выполнении которых область X , обладающая вышеуказанным свойством, существует.

3°. Вычисление объема

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве задана некоторая кубуруемая область Y . В прямоугольных декартовых координатах $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ ее объем вычисляется при помощи n -кратного интеграла по формуле

$$v = \int_Y \dots \int_Y dy^1 \dots dy^n.$$

При переходе к другой координатной системе $(x) = (x^1, \dots, x^n)$, этот интеграл преобразуется так:

$$\int_Y \dots \int_Y dy^1 \dots dy^n = \int_X \dots \int_X \left| \det \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) \right| dx^1 \dots dx^n.$$

Воспользуемся примером 2 пункта 1°. Имеем

$$\left| \det \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) \right| = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Тем самым объем заданной области в произвольных криволинейных координатах вычисляется по формуле

$$v = \int_X \dots \int_X \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n,$$

где X — область изменения координат x^1, \dots, x^n , соответствующая заданной.

§ 8. СИМВОЛЫ КРИСТОФФЕЛЯ *

1°. Определение

Пусть в области X пространства A^n введена координатная система $(x) = (x^1, \dots, x^n)$.

Произвольная точка M области X определяется своим радиус-вектором

$$r = r(x^1, \dots, x^n).$$

В точке M естественно возникает репер

$$\left\{ M; \frac{\partial r}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x^n} \right\}.$$

Вычислим в точке M вторую производную ее радиус-вектора

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} (M) = \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} (x^1, \dots, x^n).$$

* Кристоффель (Christoffel) Эльвин Бруно (10.11.1829—15.3.1900) — немецкий математик.

Ясно, что полученный вектор можно представить в виде линейной комбинации векторов $\frac{\partial r}{\partial x^k}$:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial r}{\partial x^k}. \quad (1)$$

Легко видеть, что коэффициенты Γ_{ij}^k в этом разложении симметричны:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

В силу произвольности выбора точки M можно заключить, что соотношение (1) справедливо в любой точке области X .

Пусть $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ — другая координатная система в области X и $\left\{ M; \frac{\partial r}{\partial y^l}, \dots, \frac{\partial r}{\partial y^n} \right\}$ — соответствующий координатный репер. Рассуждая как и выше, получаем, что

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^l \partial y^m} = {}' \Gamma_{lm}^p \frac{\partial r}{\partial y^p}. \quad (2)$$

Найдем правило, по которому при переходе от координатной системы (x) к координатной системе (y) по коэффициентам Γ_{ij}^k можно вычислить коэффициенты ${}' \Gamma_{lm}^p$.

Продифференцируем векторную функцию

$$r = r(x^1, \dots, x^n)$$

по y^l ($l=1, \dots, n$), считая ее сложной функцией переменных y^1, \dots, y^n . Имеем

$$\frac{\partial r}{\partial y^l} = \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \quad (3)$$

и, далее,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^l \partial y^m} = \frac{\partial}{\partial y^m} \left(\frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \right) = \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} \frac{\partial x^i}{\partial y^m} + \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^l \partial y^m}.$$

Преобразуем полученное выражение. Заменим в первой группе слагаемых каждый вектор $\frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j}$ его выражением (1). Тогда, изменяя индекс суммирования во второй группе ($i \rightarrow k$), получим

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^l \partial y^m} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^l \partial y^m} \right) \frac{\partial r}{\partial x^k}.$$

Так как

$$\frac{\partial r}{\partial x^k} = \frac{\partial r}{\partial y^p} \frac{\partial y^p}{\partial x^k},$$

то окончательно имеем

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^l \partial y^m} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^l \partial y^m} \right) \frac{\partial y^p}{\partial x^k} \frac{\partial r}{\partial y^p}.$$

Сравнивая последнее равенство с формулой (2), в силу единственности разложения вектора по базису получаем

$$\Gamma_{lm}^p = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^l \partial y^m} \right) \frac{\partial y^p}{\partial x^k}. \quad (4)$$

Формула (4) представляет собой закон преобразования коэффициентов Γ_{ij}^k . В общем случае этот закон не является тензорным, так как вторая производная $\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^l \partial y^m}$ необязательно равна нулю.

2°. Специальные системы координат

В дальнейшем нам понадобятся координатные системы, в которых коэффициенты Γ_{ij}^k обладают некоторыми полезными свойствами.

А. Покажем, что в окрестности произвольной точки M всегда можно выбрать криволинейные координаты так, чтобы коэффициенты Γ_{ij}^k в этой точке обращались в нуль:

$$\Gamma_{ij}^k(M) = 0.$$

Пусть $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ — криволинейные координаты, заданные в окрестности фиксированной точки M .

Для простоты вычислений будем считать, что точка M имеет нулевые координаты: $x^i(M) = 0, i = 1, \dots, n$.

Введем в окрестности точки M новые координаты $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ посредством следующих формул:

$$x^q = y^q - \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^q(M) y^l y^m. \quad (5)$$

Ясно, что $y^j(M) = 0 (j = 1, \dots, n)$.

Запишем формулы (4) в удобном для последующего виде:

$$\Gamma_{lm}^p \frac{\partial x^q}{\partial y^p} = \Gamma_{ij}^q \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial y^l \partial y^m} \quad (6)$$

(достаточно умножить обе части на $\frac{\partial x^q}{\partial y^p}$ и просуммировать по p).

Вычислим в точке M значения производных $\frac{\partial x^q}{\partial y^p}$ и $\frac{\partial^2 x^q}{\partial y^p \partial y^s}$.

Продифференцируем равенства (5) по y^p :

$$\frac{\partial x^q}{\partial y^p} = \delta_p^q - \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^q(M) (\delta_p^l y^m + y^l \delta_p^m) = \delta_p^q - \frac{1}{2} (\Gamma_{pm}^q(M) y^m + \Gamma_{lp}^q(M) y^l).$$

Отсюда в силу симметричности коэффициентов $\Gamma_{ij}^k, \Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$, получаем, что

$$\frac{\partial x^q}{\partial y^p} = \delta_p^q - \Gamma_{pm}^q(M) y^m. \quad (7)$$

Найдем выражение для вторых производных. Имеем

$$\frac{\partial^2 x^q}{\partial y^p \partial y^s} = -\Gamma_{pm}^q(M) \delta_s^m = -\Gamma_{ps}^q(M). \quad (8)$$

Полагая в формулах (7), (8) $y^i = 0$, получаем, что в точке M

$$\frac{\partial x^q}{\partial y^p}(M) = \delta_p^q, \quad \frac{\partial^2 x^q}{\partial y^p \partial y^s}(M) = -\Gamma_{ps}^q(M).$$

Рассмотрим равенства (6) в точке M . При подстановке в них найденных выражений для производных приходим к следующим формулам:

$$\Gamma_{lm}^p(M) \delta_p^q = \Gamma_{ij}^q(M) \delta_i^l \delta_m^j - \Gamma_{lm}^q(M).$$

Отсюда с учетом свойств символа Кронекера δ_j^i получаем, что

$$\Gamma_{lm}^q(M) = \Gamma_{lm}^q(M) - \Gamma_{lm}^q(M) = 0. *$$

Б. Покажем, что в окрестности произвольной точки M всегда можно выбрать систему координат (x) так, что величины

$$\Gamma_{klm}^q = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{lm}^q + \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{mk}^q + \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{kl}^q \quad (9)$$

в точке M равны нулю:

$$\Gamma_{klm}^q(M) = 0.$$

Пусть $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ — координаты, заданные в окрестности точки M ; $x^i(M) = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Введем новые координаты (y) при помощи следующих формул:

$$x^q = y^q - \frac{1}{18} \Gamma_{klm}^q(M) y^k y^l y^m. \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что в точке M

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^k}(M) = \delta_k^i, \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^k \partial y^l}(M) = 0, \quad \frac{\partial^3 x^i}{\partial y^k \partial y^l \partial y^m} = -\frac{1}{3} \Gamma_{klm}^i(M). \quad (11)$$

Вновь обратимся к формулам (6) преобразования символов Кристоффеля Γ_{ij}^k .

Найдем производную $\frac{\partial}{\partial y^k}$ от левой и от правой частей соотношения (6):

левая часть

$$\frac{\partial}{\partial y^k} \left(\Gamma_{lm}^p \frac{\partial x^q}{\partial y^p} \right) = \left(\frac{\partial \Gamma_{lm}^p}{\partial y^k} \right) \cdot \frac{\partial x^q}{\partial y^p} + \Gamma_{lm}^p \cdot \frac{\partial^2 x^q}{\partial y^p \partial y^k};$$

правая часть

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\Gamma_{ij}^q \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial y^l \partial y^m} \right) &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^q}{\partial x^r} \right) \cdot \frac{\partial x^r}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^m} + \\ &+ \Gamma_{ij}^q \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^l \partial y^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^m} + \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \cdot \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^m \partial y^k} \right) + \frac{\partial^3 x^q}{\partial y^k \partial y^l \partial y^m}. \end{aligned}$$

Рассматривая последние два равенства в точке M и учитывая формулы (11), получаем, что

$$\frac{\partial \Gamma_{lm}^q}{\partial y^k} (M) = \frac{\partial \Gamma_{lm}^q}{\partial x^k} (M) - \frac{1}{3} \Gamma_{klm}^q (M).$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial \Gamma_{mk}^q}{\partial y^l} (M) = \frac{\partial \Gamma_{mk}^q}{\partial x^l} (M) - \frac{1}{3} \Gamma_{lmk}^q (M),$$

$$\frac{\partial \Gamma_{kl}^q}{\partial y^m} (M) = \frac{\partial \Gamma_{kl}^q}{\partial x^m} (M) - \frac{1}{3} \Gamma_{mkl}^q (M).$$

Складывая последние три соотношения и замечая, что

$$\Gamma_{klm}^q = \Gamma_{lmk}^q = \Gamma_{mkl}^q,$$

приходим к требуемому равенству

$$\Gamma_{klm}^q (M) = \frac{\partial}{\partial y^k} \Gamma_{lm}^q (M) + \frac{\partial}{\partial y^l} \Gamma_{mk}^q (M) + \frac{\partial}{\partial y^m} \Gamma_{kl}^q (M) = 0. *$$

3°. Символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода

Пусть в области X задан метрический тензор g . Тогда коэффициенты $\Gamma_{ij}^k(M)$ в разложении (1) можно выразить через его компоненты $g_{ij}(M)$.

Чтобы получить указанный явный вид, умножим обе части равенства (1) на вектор $\frac{\partial r}{\partial x^l}$ скалярно.

Пользуясь тем, что

$$\left\langle \frac{\partial r}{\partial x^k}, \frac{\partial r}{\partial x^l} \right\rangle = g_{kl}, \quad (12)$$

получаем

$$\left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^l \partial x^i}, \frac{\partial r}{\partial x^l} \right\rangle = g_{hl} \Gamma_{ij}^h. \quad (13)$$

Обозначим для удобства правую часть последней формулы через $\Gamma_{l,ij}$:

$$\Gamma_{l,ij} = g_{kl} \Gamma_{ij}^k \quad (14)$$

и найдем для $\Gamma_{l,ij}$ явное выражение.

Дифференцируя обе части равенства (12) по переменной x^m , получаем, что

$$\left\langle \frac{\partial r}{\partial x^k}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^l \partial x^m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^k \partial x^m}, \frac{\partial r}{\partial x^l} \right\rangle = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}$$

или, с учетом формул (13) и (14),

$$\Gamma_{k,lm} + \Gamma_{l,km} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}. \quad (15)$$

Соотношение (15) справедливо для любых k, l и m , заключенных между 1 и n .

Чтобы найти нужные нам явные выражения, поступим следующим образом.

Последовательно придавая тройке (k, l, m) в формуле (15) значения (i, j, q) , (j, q, i) и (q, i, j) , получим соответственно

$$\Gamma_{i,jq} + \Gamma_{j,iq} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q},$$

$$\Gamma_{j,qi} + \Gamma_{q,ji} = \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i},$$

$$\Gamma_{q,ij} + \Gamma_{i,qj} = \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^j}.$$

Прибавляя к первому равенству второе и отнимая третье, с учетом симметричности коэффициентов $\Gamma_{l,ij}$ по индексам i и j находим, что

$$\Gamma_{i,tq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{iq}}{\partial x^j} \right). \quad (16)$$

Остается выразить Γ_{ij}^k .

Обратимся к формулам (14). Пользуясь тем, что

$$g_{ml} g^{lk} = \delta_m^k,$$

имеем

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^m \delta_m^k = \Gamma_{ij}^m g_{ml} g^{lk} = \Gamma_{l,ij} g^{lk}.$$

Отсюда, полагая в равенстве (16) $j=l, q=j$, получаем

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (17)$$

Верно и обратное. Для величин Γ^k_{ij} , введенных по формулам (17), выполняется закон преобразования (4). В этом нетрудно убедиться путем прямых вычислений.

Определение. Коэффициенты $\Gamma_{j, iq}$, вычисленные по формуле (14), называются *символами Кристоффеля 1-го рода*, а коэффициенты Γ^k_{ij} , определяемые формулой (17), — *символами Кристоффеля 2-го рода*.

Замечание. Пусть $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ — прямолинейные координаты. Тогда компоненты g_{ij} метрического тензора не зависят от выбора точки M (постоянны) и, значит, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$.

Из формул (16) и (17) видно, что в этом случае символы Кристоффеля обращаются в нуль:

$$\Gamma^k_{ij} = 0, \quad \Gamma_{l, ij} = 0. *$$

Выше (в 2°. Специальные системы координат) было показано, что в окрестности произвольной точки M можно ввести криволинейные координаты $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ таким образом, что символы Кристоффеля Γ^k_{ij} , вычисленные в этих координатах, в самой точке M обращаются в нуль:

$$\Gamma^k_{ij}(M) = 0.$$

Из формулы (14) вытекает, что в этих координатах также и

$$\Gamma_{l, ij}(M) = 0.$$

Отсюда, пользуясь равенством (15), получаем, что

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}(M) = 0.$$

§ 9. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

1°. Определение операции ковариантного дифференцирования

Пользуясь символами Кристоффеля, введем важную операцию ковариантного дифференцирования ∇ .

Сформулируем сначала *основные требования* к этой операции.

1. В прямолинейных координатах операция ковариантного дифференцирования ∇_k должна совпадать с обычной операцией дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x^k}$.

2. Операция ковариантного дифференцирования ∇ должна быть тензорной: если T — тензорное поле, то ∇T также тензорное поле.

Определим эту операцию:

А. Если T — тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, т. е. гладкая функция

$$f = f(x^1, \dots, x^n), \text{ то}$$

$$\nabla_k f = \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad (k=1, \dots, n).$$

Б. Если T — тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T = (T^i)$, то

$$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{\alpha k}^i T^\alpha.$$

В. Если T — тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T = (T_j)$, то

$$\nabla_k T_j = \frac{\partial T_j}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^\alpha T_\alpha.$$

И вообще:

Г. Если $T = (T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$ — тензор типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, то

$$\begin{aligned} \nabla_m T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = & \frac{\partial}{\partial x^m} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \Gamma_{i_1 k}^{i_1} T_{j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} + \dots + \Gamma_{i_p k}^{i_p} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p-1}} - \\ & - \Gamma_{j_1 k}^{j_1} T_{i_1 \dots i_p}^{j_2 \dots j_q} - \dots - \Gamma_{j_q k}^{j_q} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{q-1}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Убедимся в том, что для введенной операции (А—Г) сформулированные выше требования выполнены.

Справедливость 1-го требования легко следует из того, что в прямолинейных координатах $g_{ij} = \text{const}$ и, значит, $\Gamma^k_{ij} \equiv 0$ (см. § 8, 2°. Специальные системы координат).

Покажем, что эта операция является тензорной (2-е требование).

ТЕОРЕМА. Ковариантная производная

$$\nabla_m T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

тензора $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ является тензором типа $\begin{pmatrix} p \\ q+1 \end{pmatrix}$.

* Составим $\nabla_m T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ по формуле (1) и вычислим

$$\frac{\partial}{\partial x^m} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p},$$

пользуясь равенством

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{j_p}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_q}}. \quad (2)$$

Тогда получим, что

$$\nabla_m T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = A + B(i_1) + \dots + B(i_p) + C(j_1) + \dots + C(j_q), \quad (3)$$

где $A = \frac{\partial}{\partial x^m} \left({}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \right) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{j_q}},$

$$B_1 = B(i_1) = {}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \right) \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{k_2}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{j_q}} + \Gamma_{im}^{i_1} T_{i_1 \dots i_q}^{i_2 \dots i_p} \quad (4)$$

(для индексов i_2, \dots, i_p соответствующие слагаемые $B(i_2), \dots, B(i_p)$ имеют аналогичный вид),

$$C_1 = C(j_1) = {}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{k_p}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{j_1}} \right) \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{j_q}} - \Gamma_{im}^{j_1} T_{i_1 \dots i_q}^{i_2 \dots i_p}$$

(для индексов j_2, \dots, j_q соответствующие слагаемые C_2, \dots, C_q имеют аналогичный вид).

Преобразуем эти величины.

Запишем выражение для A несколько по-иному. Имеем

$$A = \frac{\partial}{\partial y^s} \left({}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \right) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{j_q}} \frac{\partial y^s}{\partial x^m}.$$

Обратимся теперь к выражению (4) для B_1 .

Пользуясь равенством

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} = \frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial y^{k_1} \partial y^s} \cdot \frac{\partial y^s}{\partial x^m}$$

и формулой (2), получим, что

$$B_1 = {}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial y^{k_1} \partial y^s} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{k_2}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{j_q}} \frac{\partial y^s}{\partial x^m} + \\ + \Gamma_{im}^{i_1} {}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_2 \dots k_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^k} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{k_2}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{j_q}}.$$

Заменяв индекс суммирования в первой группе. ($k_1 \rightarrow k$), преобразуем B_1 к следующему виду:

$$B_1 = \left(\frac{\partial^2 x^1}{\partial y^k \partial y^s} \frac{\partial y^s}{\partial x^m} + \Gamma_{im}^{i_1} \frac{\partial x^1}{\partial y^k} \right) \cdot {}'T_{i_1 \dots i_q}^{k_2 \dots k_p} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{k_2}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{j_q}}.$$

Воспользуемся законом преобразования символов Γ_{ij}^k , записав его так:

$${}'T_{ks}^p \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^p} \frac{\partial y^s}{\partial x^m} = \Gamma_{im}^{i_1} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^k \partial y^s} \frac{\partial y^s}{\partial x^m}.$$

Тогда

$$B_1 = \Gamma_{k_s}^{k_1} T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{k_2}} \dots \frac{\partial y^{l_q}}{\partial x^{j_q}} \frac{\partial y^s}{\partial x^m}.$$

Подобным же образом можно убедиться в справедливости формулы

$$C_1 = -\Gamma_{i_s}^j T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{k_2}} \dots \frac{\partial y^{l_q}}{\partial x^{j_q}} \frac{\partial y^s}{\partial x^m}.$$

Заменяя $A, B_1, \dots, B_p, C_1, \dots, C_q$ в формуле (3) их новыми выражениями и вынося за скобки общий во всех $p+q+1$ суммах множитель

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial y^{l_q}}{\partial x^{j_q}} \frac{\partial y^s}{\partial x^m},$$

получим, что

$$\nabla_m T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = \nabla_s T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial y^{l_q}}{\partial x^{j_q}} \frac{\partial y^s}{\partial x^m}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_s T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = & \frac{\partial}{\partial y^s} T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} + \Gamma_{k_s}^{k_1} T_{i_1 \dots i_q}^{k_2 \dots k_p} + \dots + \Gamma_{k_s}^{k_p} T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_{p-1}} - \\ & - \Gamma_{i_s}^j T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} - \dots - \Gamma_{i_s}^j T_{i_1 \dots i_{q-1}}^{k_1 \dots k_p} \end{aligned} \quad (6)$$

— ковариантная производная, составленная в координатах (y) по общей схеме (1).

Формула (5) позволяет сделать следующий вывод: ковариантная производная $\nabla_m T_{(j)}^{(i)}$ тензорного поля $T_{(j)}^{(i)}$ типа $\binom{p}{q}$ изменяется по тензорному закону типа $\binom{p}{q+1}$.

Тем самым число ковариантных индексов увеличивается на единицу. Отсюда и название операции — *ковариантное дифференцирование*. *

2°. Свойства операции ковариантного дифференцирования

Посмотрим, как введенная операция преобразует линейную комбинацию тензоров и произведение тензоров.

Справедливы следующие формулы:

$$1+. \nabla_k (\lambda T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) = \lambda \nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu \nabla_k S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p},$$

где λ и μ — произвольные постоянные.

$$2+. \nabla_m \left(T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} \right) = \left(\nabla_m T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \right) S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} + \\ + T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \left(\nabla_m S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} \right).$$

1-е свойство следует из определения операции ∇ . Достаточно записать выражения для ковариантных производных тензоров T и S , умножить полученные соотношения на λ и μ соответственно и сложить результаты. *

Докажем второе свойство.

* Положим

$$U_{j_1 \dots j_{q+h}}^{i_1 \dots i_{p+r}} = T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}. \quad (7)$$

Тогда по определению операции ∇ получаем

$$\nabla_m U_{j_1 \dots j_{q+h}}^{i_1 \dots i_{p+r}} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(U_{j_1 \dots j_{q+h}}^{i_1 \dots i_{p+r}} \right) + \Gamma_{im}^{i_1} U_{j_1 \dots j_{q+h}}^{i_2 \dots i_{p+r}} + \dots + \Gamma_{im}^{i_{p+r}} U_{j_1 \dots j_{q+h}}^{i_1 \dots i_{p+r-1}} - \\ - \Gamma_{i_1 m}^j U_{j_1 \dots j_{q+h}}^{i_1 \dots i_{p+r}} - \dots - \Gamma_{j_{q+h} m}^j U_{j_1 \dots j_{q+h}}^{i_1 \dots i_{p+r}}.$$

Отсюда с учетом формулы (7) вытекает требуемое:

$$\nabla_m \left(T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^m} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \right) S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} + \\ + T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} \right) + \left(\Gamma_{im}^{i_1} T_{i_1 \dots i_q}^{i_2 \dots i_p} + \dots + \Gamma_{im}^{i_p} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_{p-1}} \right) \times \\ \times S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} + T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \left(\Gamma_{im}^{i_{p+1}} S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+2} \dots i_{p+r}} + \dots + \Gamma_{im}^{i_{p+r}} S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+h-1}} \right) - \\ - \left(\Gamma_{i_1 m}^j T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \dots + \Gamma_{j_{q+h} m}^j T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \right) S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} - \\ - T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \left(\Gamma_{j_{q+1} m}^j S_{j_{q+2} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} + \dots + \Gamma_{j_{q+h} m}^j S_{j_{q+1} \dots j_{q+h-1}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} \right) = \\ = \left(\nabla_m T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \right) S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} + T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \left(\nabla_m S_{j_{q+1} \dots j_{q+h}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} \right). *$$

$$3+. \left(\nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \right) \Big|_{i_1=s}^{i_1=s} = \nabla_k \left(T_{s j_2 \dots j_q}^{s i_2 \dots i_p} \right).$$

Приведенную формулу следует понимать так: в левой части свертывание производится после дифференцирования, а в правой — до дифференцирования.

* Начнем с левой части. Имеем

$$\left(\nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \right) \Big|_{i_1=s}^{i_1=s} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \right) \Big|_{i_1=s}^{i_1=s} + \Gamma_{ik}^{i_2} T_{s j_2 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} + \Gamma_{ik}^{i_3} T_{s j_2 \dots j_q}^{s i_3 \dots i_p} + \dots \\ \dots + \Gamma_{ik}^{i_p} T_{s j_2 \dots j_q}^{s i_2 \dots i_p} - \Gamma_{sk}^{i_2} S_{j_2 \dots j_q}^{s i_2 \dots i_p} - \Gamma_{sk}^{i_3} S_{j_2 \dots j_q}^{s i_3 \dots i_p} - \dots - \Gamma_{j_q k}^{i_p} T_{s j_2 \dots j_q}^{s i_2 \dots i_p}.$$

Сумма отмеченных курсивом слагаемых равна нулю (они различаются только обозначениями индексов суммирования). Это позволяет записать левую часть рассматриваемой формулы в следующем виде:

$$\left(\nabla_k T_{i_1 i_2 \dots i_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \right)_{j_1=s}^{i_1=s} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k} T_{i_1 i_2 \dots i_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \right)_{j_1=s}^{i_1=s} + \Gamma_{ik}^i T_{s j_2 \dots j_q}^{s i_1 \dots i_p} + \dots + \Gamma_{ik}^i T_{s j_2 \dots j_q}^{s i_2 \dots i_p} - \\ - \Gamma_{j_2 k}^j T_{s j_3 \dots j_q}^{s i_2 \dots i_p} - \dots - \Gamma_{j_q k}^j T_{s j_2 \dots j_{q-1}}^{s i_2 \dots i_p}.$$

Вглядимся в первую часть полученной формулы.

Она представляет собой ковариантную производную от свернутого тензора $T_{s j_2 \dots j_q}^{s i_2 \dots i_p}$, составленную по общей схеме (1). *

3°. Тензор Римана*—Кристоффеля типа $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$

Построим при помощи введенной операции ковариантного дифференцирования один важный геометрический объект — специальный тензор ранга 4.

Пусть T^i — векторное поле. Вычислим его вторую ковариантную производную $\nabla_k \nabla_l T^i$. Пользуясь правилами Б и Г, получим

$$\nabla_h \nabla_l T^i = \nabla_h \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^i T^q \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^i T^q \right) + \\ + \Gamma_{pk}^i \left(\frac{\partial T^p}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^p T^q \right) - \Gamma_{lk}^p \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^p} + \Gamma_{qp}^i T^q \right) = \\ = \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial T^q}{\partial x^k} \Gamma_{ql}^i + \Gamma_{pk}^i \frac{\partial T^p}{\partial x^l} - \\ - \Gamma_{lk}^p \frac{\partial T^i}{\partial x^p} + T^q \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p T^q - \Gamma_{lk}^p \Gamma_{qp}^i T^q.$$

Переставляя индексы k и l местами, найдем выражения для производной $\nabla_l \nabla_k T^i$ и составим разность:

$$\nabla_h \nabla_l T^i - \nabla_l \nabla_k T^i = (\nabla_h \nabla_l - \nabla_l \nabla_h) T^i.$$

Учитывая симметричность коэффициентов Γ_{ij}^k по нижним индексам, после несложных преобразований получим:

$$(\nabla_h \nabla_l - \nabla_l \nabla_h) T^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} \right) T^q + (\Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p) T^q.$$

Введем следующее обозначение:

$$R_{qkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p. \quad (8)$$

* Риман (Riemann) Георг Фридрих Бернхард (17.11.1826—20.7.1866) — немецкий математик.

Тогда предыдущую формулу можно записать так:

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = R_{qkl}^i T^q. \quad (9)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. R_{qkl}^i — тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

* Согласно определению операции ковариантного дифференцирования левая часть равенства (9) представляет собой тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Обозначим его через A_{kl}^i :

$$A_{kl}^i = (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i.$$

Тем самым

$$A_{kl}^i = R_{qkl}^i T^q$$

и в новых координатах (y)

$${}'A_{rs}^i = {}'R_{mrs}^i {}'T^m.$$

Из того, что A_{kl}^i — тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, получаем

$${}'R_{mrs}^i {}'T^m = R_{qkl}^i T^q \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial x^l}{\partial y^s}.$$

Преобразуем последнее равенство, пользуясь формулой

$${}'T^m = T^q \frac{\partial y^m}{\partial x^q}.$$

Имеем

$${}'R_{mrs}^i T^q \frac{\partial y^m}{\partial x^q} = R_{qkl}^i T^q \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial x^l}{\partial y^s}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left({}'R_{mrs}^i \frac{\partial y^m}{\partial x^q} - R_{qkl}^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial x^l}{\partial y^s} \right) T^q = 0.$$

Полученная формула справедлива для любого векторного поля T^q и, значит, представляет собой тождество.

В силу произвольности поля T^q имеет место следующее равенство:

$${}'R_{mrs}^i \frac{\partial y^m}{\partial x^q} - R_{qkl}^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial x^l}{\partial y^s} = 0.$$

Умножим обе части на $\frac{\partial x^q}{\partial y^t}$ и, просуммировав по q , получим

$${}'R_{irs}^l - R_{qkl}^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial x^l}{\partial y^s} \frac{\partial x^q}{\partial y^t} = 0.$$

Перенесем вычитаемое в правую часть:

$${}^i R^j_{trs} = R^i_{qkl} \frac{\partial y^j}{\partial x^t} \frac{\partial x^q}{\partial y^r} \frac{\partial x^k}{\partial y^s} \frac{\partial x^s}{\partial y^l}. \quad (10)$$

Найденная формула показывает, что R^i_{qkl} действительно является тензором типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *

Укажем простейшие свойства тензора R^i_{qkl} , вытекающие непосредственно из его определения (8):

$$\begin{aligned} 1+. \quad R^i_{qkl} &= -R^i_{qlk}. \\ 2+. \quad R^i_{qkl} + R^i_{klq} + R^i_{lqk} &= 0. \end{aligned}$$

4°. Ковариантное дифференцирование и метрический тензор

Рассмотрим некоторые свойства операции ковариантного дифференцирования для случая, когда задан метрический тензор g_{ij} и коэффициенты Γ^k_{ij} вычисляются по формулам (14) § 8.

УТВЕРЖДЕНИЕ.

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad \nabla_k g^{mi} = 0. \quad (11)$$

* Убедимся сначала в справедливости первого из равенств, предъявленных в утверждении.

По определению операции ∇_k имеем

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^{\alpha}_{ik} g_{\alpha j} - \Gamma^{\beta}_{jk} g_{i\beta}.$$

Подставим в правую часть этой формулы выражения для Γ^k_{ij} через компоненты метрического тензора:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right).$$

Пользуясь тем, что

$$g^{\alpha m} g_{\alpha j} = \delta^m_j, \quad g^{\beta l} g_{i\beta} = \delta^l_i,$$

получаем

$$\begin{aligned} \nabla_k g_{ij} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} g^{\alpha m} g_{\alpha j} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\beta l} g_{i\beta} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) = \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к доказательству второго равенства. Так как

$$\nabla_k \delta_j^i = \frac{\partial \delta_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{\alpha k}^i \delta_j^\alpha - \Gamma_{j k}^\beta \delta_\beta^i = 0 + \Gamma_{j k}^i - \Gamma_{j k}^i = 0,$$

то из равенства

$$\delta_j^i = g_{mj} g^{mi}$$

получаем, что

$$0 = \nabla_k \delta_j^i = \nabla_k (g_{mj} g^{mi}) = (\nabla_k g_{mj}) g^{mi} + g_{mj} (\nabla_k g^{mi}) = g_{mj} (\nabla_k g^{mi}).$$

Отсюда вследствие невырожденности g_{mj} вытекает требуемое

$$\nabla_k g^{mi} = 0. *$$

Из того что ковариантная производная метрического тензора равна нулю, в частности, следует, что для любого тензорного поля

$$T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$$

выполняются равенства

$$\begin{aligned} \nabla_k (g_{ij} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) &= g_{ij} (\nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}), \\ \nabla_k (g^{ij} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) &= g^{ij} (\nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}). \end{aligned} \quad (12)$$

Равенства (12) означают, что операция ковариантного дифференцирования перестановочна и с операцией поднятия индексов и с операцией опускания индексов.

5°. Тензор Римана—Кристоффеля типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Положим

$$R_{mqkl} = g_{mi} R_{qkl}^i. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 2. Справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} R_{mqkl} &= g_{pr} (\Gamma_{mi}^p \Gamma_{qk}^r - \Gamma_{mk}^p \Gamma_{ql}^r) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^q \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^m \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^q \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^m \partial x^k} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

* Пользуясь определением (8) тензора R^i_{qkl} , запишем формулу (13) подробнее. Имеем

$$R_{mqkl} = g_{mi} \left(\frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} \right) + g_{mi} (\Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p). \quad (15)$$

Первую группу слагаемых в правой части равенства (15) можно записать так:

$$\begin{aligned}
 g_{mi} \left(\frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{mi} \Gamma_{ql}^i) - \frac{\partial}{\partial x^l} (g_{mi} \Gamma_{qk}^i) + \\
 &+ \Gamma_{qk}^i \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l} - \Gamma_{ql}^i \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{m,ql} - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{m,qk} + \Gamma_{qk}^i \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l} - \Gamma_{ql}^i \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Расписав разность

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{m,ql} - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{m,qk}$$

с учетом формулы (16) из § 8 подробно, получим

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{m,ql} - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{m,qk} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^k \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{kq}}{\partial x^m \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^q \partial x^l} \right).
 \end{aligned}$$

Преобразуем теперь вторую группу слагаемых из формулы (15), прибавив к ней разность

$$\Gamma_{qk}^i \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l} - \Gamma_{ql}^i \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k}$$

из соотношения (16). Имеем

$$\begin{aligned}
 &g_{mi} (\Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p) + \Gamma_{qk}^i \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l} - \Gamma_{ql}^i \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} = \\
 &= \Gamma_{m,pk} \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{m,pl} \Gamma_{qk}^p + \Gamma_{qk}^p \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^l} - \Gamma_{ql}^p \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^k} = \\
 &= \Gamma_{ql}^p \left[\Gamma_{m,pk} - \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^k} \right] - \Gamma_{qk}^p \left[\Gamma_{m,pl} - \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^l} \right] = \\
 &= \Gamma_{ql}^p \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^m} \right) - \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^k} \right] - \\
 &- \Gamma_{qk}^p \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^m} \right) - \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^l} \right] = \\
 &= \Gamma_{qk}^p \Gamma_{p,ml} - \Gamma_{ql}^p \Gamma_{p,mk} = g_{pr} (\Gamma_{ml}^r \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{mk}^r \Gamma_{ql}^p).
 \end{aligned}$$

Собирая полученные выражения, убеждаемся в справедливости сформулированного утверждения

$$\begin{aligned}
 R_{mqkl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^q \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^m \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^q \partial x^l} \right) + \\
 &+ g_{rs} (\Gamma_{ml}^s \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{mk}^s \Gamma_{ql}^p). \quad *
 \end{aligned}$$

Из доказанной формулы вытекает следующий неожиданный вывод.

В случае, когда координатная система $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ является прямолинейной, компоненты g_{ij} метрического тензора — постоянные числа. Тем самым их производные равны нулю. Отсюда следует, что вычисленные по ним символы Кристоффеля также равны нулю. Таким образом, компоненты тензора Римана—Кристоффеля в прямолинейных, а значит и в любых других координатах, нулевые. Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Тензор Римана—Кристоффеля точечного евклидова пространства является нулевым.

В. АРИФМЕТИЧЕСКОЕ (КООРДИНАТНОЕ) ПРОСТРАНСТВО

§ 10. ТЕНЗОРЫ В КООРДИНАТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В предыдущих разделах А и Б мы последовательно разрабатывали аппарат тензорного исчисления, исходя из наглядных и геометрических соображений и используя аналогию. При этом замеченные факты часто удавалось переносить на новую, более общую ситуацию, расширяя тем самым область применимости развиваемых методов.

В этом разделе мы еще раз поступим подобным же образом: будем рассматривать изложенное выше как наводящие соображения для создания более абстрактных конструкций, причем так, чтобы установленные выше факты (точнее, их прямые аналоги) оставались справедливыми. Поэтому материал, помещаемый в этом разделе, нужно рассматривать двояко: с одной стороны, как сводку введенных понятий и установленных фактов, а с другой — как последовательное, хотя и краткое, изложение основ тензорного исчисления в координатном пространстве.

1°. Координатное пространство

Точкой будем называть любой упорядоченный набор (x^1, \dots, x^n) из n вещественных чисел. Множество всевозможных таких наборов назовем *n -мерным координатным пространством*.

Обозначение: \mathbb{R}^n .

Точки пространства \mathbb{R}^n будем обозначать прописными латинскими буквами — M, N, \dots . Запись $M(x^1, \dots, x^n)$ означает, что точка M отвечает набору (x^1, \dots, x^n) . В этом случае числа x^i , $i=1, \dots, n$, называются *координатами* точки M .

Пусть ε — некоторое положительное число.

Определение. Множество точек $N(y^1, \dots, y^n)$, для которых

$$(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2 < \varepsilon^2,$$

называется *ε -окрестностью* точки $M(x^1, \dots, x^n)$.

Определение. Множество X точек из \mathbb{R}^n называется *открытым*, если для каждой точки M этого множества можно указать ее ε -окрестность, целиком принадлежащую множеству X .

Открытое связное множество будем называть *областью*.

Окрестностью точки M называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

2°. Преобразования координат

Пусть X — некоторая область пространства \mathbb{R}^n . Рассмотрим в ней набор n функций

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n = y^n(x^1, \dots, x^n). \quad (1)$$

Потребуем выполнения следующих условий гладкости.

1. Функции $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $i=1, \dots, n$, имеют в области X непрерывные первые производные $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ ($j=1, \dots, n$).

2. Определитель матрицы Якоби

$$J_{x \rightarrow y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

всюду в области X отличен от нуля.

3. Отображение области X на соответствующую область Y изменения переменных y^1, \dots, y^n , задаваемое соотношениями (1), является взаимно однозначным.

Тем самым в области X вводится новая координатная система: точке M из X ставится в соответствие другой набор n чисел y^1, \dots, y^n .

Эти числа также будем называть *координатами точки M* .

Ясно, что при сформулированных условиях гладкости соотношения (1) можно разрешить относительно x^1, \dots, x^n :

$$x^i = x^i(y^1, \dots, y^n) \quad (i=1, \dots, n).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать преобразования координат (1), только подчиненные условиям гладкости.

3°. Понятие тензора

Определение. Тензорным полем типа $\binom{p}{q}$ называется геометрический объект, задаваемый в каждой координатной системе $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ упорядоченным набором n^{p+q} гладких функций

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(x^1, \dots, x^n), \quad 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_p \leq n, \\ 1 \leq j_1 \leq n, \dots, 1 \leq j_q \leq n,$$

преобразующихся при переходе к другой координатной системе $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ по правилу

$${}^i T_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}},$$

$$1 \leq k_1 \leq n, \dots, 1 \leq k_p \leq n, 1 \leq l_1 \leq n, \dots, 1 \leq l_q \leq n$$

— тензорному закону типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Можно показать, что для задания тензорного поля во всем пространстве или в некоторой области достаточно указать тип тензорного поля и его компоненты относительно какой-то одной координатной системы.

4°. Основные алгебраические операции над тензорами

1+. *Линейная комбинация тензоров*: если $T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ и $S = (S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ — тензоры типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, то их линейная комбинация

$$U = \alpha T + \beta S$$

с компонентами

$$U_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = \alpha T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \beta S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$$

также есть тензор $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

2+. *Умножение тензоров*: если $T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ и $S = (S_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_k})$ — тензоры типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$ соответственно, то их произведением является тензор $U = T \otimes S$ типа $\begin{pmatrix} p+k \\ q+m \end{pmatrix}$ с компонентами

$$U_{i_1 \dots i_{q+m}}^{i_1 \dots i_{p+k}} = T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} S_{i_{q+1} \dots i_{q+m}}^{i_{p+1} \dots i_{p+k}}.$$

3+. *Транспонирование тензора*: будем говорить, что тензор $\tilde{T} = (\tilde{T}_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $q \geq 2$, получен из [тензора $T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ транспонированием по нижним индексам при помощи перестановки σ , если его компоненты вычисляются по правилу

$$\tilde{T}_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{\sigma(i_1 \dots i_q)}^{i_1 \dots i_p}$$

(здесь σ — некоторая перестановка чисел $(1, \dots, q)$):

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(q) \end{pmatrix};$$

на наборе (j_1, \dots, j_q) перестановка σ действует так: $\sigma(j_1, \dots, j_q) = (j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)})$.

Транспонирование по верхним индексам определяется аналогично.

4+. *Свертывание тензора*: если $T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ — тензор типа $\binom{p}{q}$, $p \geq 1$,

$q \geq 1$, то тензор $\tilde{T} = (\tilde{T}_{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_q}^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p})$ типа $\binom{p-1}{q-1}$, компоненты которого вычисляются по правилу

$$\tilde{T}_{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_q}^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p} = T_{i_1 \dots i_{m-1} i_m = i_{k+1} \dots i_q}^{i_1 \dots i_{k-1} i_k = i_{k+1} \dots i_p},$$

называется *сверткой* тензора T по k -му верхнему и m -му нижнему индексам.

5+. *Симметрирование и альтернирование тензора*: если $T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ — тензор типа $\binom{p}{q}$, то операции построения тензоров $S =$

$(S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ и $A = (A_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ типа $\binom{p}{q}$ по правилам

$$S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{(i_1 \dots i_q)}^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{q!} \sum_{(\sigma)} T_{\sigma(i_1 \dots i_q)}^{i_1 \dots i_p},$$

$$A_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{[i_1 \dots i_q]}^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{q!} \sum_{(\sigma)} \text{sign } \sigma T_{\sigma(i_1 \dots i_q)}^{i_1 \dots i_p}$$

называется *симметрированием* и соответственно *альтернированием* тензора T по нижним индексам.

Аналогично определяются операции симметрирования и альтернирования тензора по верхним индексам.

5°. Метрический тензор в координатном пространстве

Зададим в области X координатного пространства \mathbb{R}^n дважды ковариантный тензор $g = (g_{ij})$, компоненты g_{ij} которого, вычисленные в координатах $(x) = (x^1, \dots, x^n)$, подчиняются условиям:

1) симметричности, $g_{ij} = g_{ji}$, и

2) положительной определенности (невырожденности,

$\det(g_{ij}) > 0$).

Из закона преобразования

$$g_{km} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^m}$$

вытекает, что эти условия сохраняются при переходе к любым другим координатам.

Назовем этот тензор g *метрическим тензором*, или *метрикой*.

Совершенно так же, как и в пунктах 1° и 2° § 3, вводятся операции поднятия и опускания индексов произвольного тензора, дважды контравариантный метрический тензор и т. п.

По аналогии с формулами пунктов 2° и 3° § 7 можно определить длину дуги произвольной гладкой кривой

$$x^i = x^i(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad i = 1, \dots, n:$$

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

и объем v произвольной области

$$v = \int_X \dots \int \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n.$$

6°. Символы Кристоффеля и операция ковариантного дифференцирования

По заданной метрике $g = (g_{ij})$ определим символы Кристоффеля 1-го рода:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

и символы Кристоффеля 2-го рода:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Нетрудно убедиться в том, что введенные символы Кристоффеля не являются тензорами. Например, при переходе к новым координатам символы Кристоффеля 2-го рода изменяются по правилу

$$\Gamma_{lm}^p = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^l \partial y^m} \right) \frac{\partial y^p}{\partial x^k}.$$

Рассуждая так же, как и в пункте 2° § 8, можно показать, что:

А) у каждой точки M существуют окрестность и координаты в ней, такие, что

$$\Gamma_{ij}^k(M) = 0,$$

Б) у каждой точки M существуют окрестность и координаты в ней, такие, что величины

$$\Gamma_{klm}^q = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{lm}^q + \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{mk}^q + \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{kl}^q$$

в точке M равны нулю:

$$\Gamma_{klm}^q(M) = 0.$$

Пользуясь символами Кристоффеля Γ_{ij}^k , введем важную операцию ковариантного дифференцирования ∇ : если $T = (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})$ — тензор типа $\binom{p}{q}$, то тензор ∇T типа $\binom{p}{q+1}$, компоненты $\nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$ которого вычисляются по формулам

$$\nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial}{\partial x^k} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \Gamma_{i_1 k}^{i_1} T_{i_2 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \dots + \Gamma_{i_q k}^{i_q} T_{i_1 \dots i_{q-1}}^{i_1 \dots i_p} - \\ - \Gamma_{i_1 k}^j T_{i_2 \dots i_q}^{j i_1 \dots i_p} - \dots - \Gamma_{i_q k}^j T_{i_1 \dots i_{q-1}}^{i_1 \dots i_p j},$$

называется ковариантной производной тензора T .

Операция ковариантного дифференцирования обладает следующими свойствами:

- 1+. $\nabla(\lambda T + \mu S) = \lambda \nabla T + \mu \nabla S$, где λ и μ — постоянные;
 - 2+. $\nabla(T \otimes S) = \nabla T \otimes S + T \otimes \nabla S$;
 - 3+. $\text{sp}(\nabla T) = \nabla(\text{sp } T)$
- (здесь $\text{sp } T$ — свертка тензора T);
- 4+. $\nabla g = 0$ (здесь g — метрический тензор).

7°. Тензор Римана—Кристоффеля

А. Тензор типа $\binom{1}{3}$.

При помощи символов Кристоффеля можно построить тензор $R = (R_{qkl}^i)$ типа $\binom{1}{3}$, компоненты которого вычисляются по следующему правилу:

$$R_{qkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p.$$

Б. Тензор типа $\binom{0}{4}$.

Положим

$$R_{mqhl} = g_{mi} R_{qkl}^i.$$

Тогда справедлива следующая формула:

$$R_{mqhl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^q \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{qh}}{\partial x^m \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^q \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^m \partial x^k} \right) + \\ + g_{pr} (\Gamma_{ml}^p \Gamma_{qk}^r - \Gamma_{mk}^p \Gamma_{ql}^r).$$

Компоненты тензора Римана—Кристоффеля обладают следующими легко проверяемыми свойствами:

- 1+. $R_{mqkl} = -R_{qmkl}$.
- 2+. $R_{mqhl} = -R_{mqlh}$.
- 3+. $R_{mqhl} = R_{hltmq}$.

Введем еще два геометрических объекта, определяемых метрическим тензором g_{ij} и тензором Римана—Кристоффеля R_{qkt}^i .

Определение. Тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ с компонентами

$$R_{qh} = R_{qki}^i$$

называется *тензором Риччи**.

Легко видеть, что тензор Риччи симметричен.

Определение. Полная свертка тензора Риччи с контравариантным метрическим тензором

$$R = g^{qh} R_{qh}$$

называется *скалярной кривизной*.

Согласно факту, отмеченному в пункте 6°, в окрестности произвольно взятой точки M можно указать такую координатную систему (x) , что в точке M

$$\Gamma_{ij}^k(M) = 0.$$

В такой системе координат компоненты тензора Римана—Кристоффеля в точке M вычисляются по следующей формуле:

$$R_{mqkl}(M) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^q \partial x^k} (M) + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^m \partial x^l} (M) - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^q \partial x^l} (M) - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^m \partial x^k} (M) \right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $T = (T^{ij})$ — тензор типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Покажите, что набор n^2 чисел S_{ij} , задаваемый условием

$$T^{ij} S_{jk} = \delta_k^i,$$

определяет тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Покажите, что набор n^2 чисел T_{ij} , такой, что

$$T_{ij} U^i V^j$$

— скаляр для любых контравариантных тензоров U и V типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, определяет тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Покажите, что для любого тензора типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ справедливо соотношение

$$T^{ij} = T^{(ij)} + T^{[ij]}.$$

* Риччи-Курбастро (Ricci-Curbastro) Грегорио (12.1.1853—7.8.1925) — итальянский математик.

4. Покажите, что для любого тензора типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ справедливо соотношение

$$T_{ijk} = T_{(ijk)} + T_{[ijk]} + \frac{2}{3}(T_{[ij]k} + T_{[k]ji}) + \frac{2}{3}(T_{(ij)k} - T_{k(ij)}).$$

5. Покажите, что тензор T_{ij} , удовлетворяющий условию

$$T_{ij}U^iU^j = 0,$$

для любого контравариантного вектора U^i , является кососимметричным.

6. Покажите, что

$$T_{[ij]}S^{ij} = T_{ij}S^{[ij]} = T_{[ij]}S^{[ij]}$$

для любых тензоров $T = (T_{ij})$ и $S = (S^{ij})$.

7. Покажите, что

$$g^{kl}\Gamma_{kl}^i = -\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{ik}) \right),$$

где $g = \det(g_{ij})$.

8. Покажите, что

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k}.$$

9. Покажите, что если $T^{[ij]} = 0$, то

$$\nabla_h T_i^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (T_i^k \sqrt{g}) + \frac{1}{2} T_{jl} \frac{\partial}{\partial x^l} g^{jl}.$$

10. Покажите, что

$$\nabla_m R_{ikl}^p + \nabla_l R_{imk}^p + \nabla_k R_{ilm}^p = 0.$$

11. Покажите, что

$$R_{ij} = \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^k + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{g}.$$

12. Покажите, что

$$\nabla_i R_j^i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} R.$$

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

Рассказанное в предыдущей главе, обдумывание введенного там понятия метрического тензора и его свойств, некоторые другие наблюдения приводят нас к довольно естественному вопросу: нельзя ли, задав произвольно дважды ковариантный симметричный невырожденный тензор, связать с ним определенную геометрию наподобие евклидовой геометрии.

Оказывается, это вполне возможно — задание произвольной метрики позволяет построить вполне содержательную геометрию.

Основным объектом этой главы являются римановы пространства. В этих пространствах, геометрия которых может весьма существенно отличаться от геометрии евклидовых пространств, возникают содержательные понятия, устанавливаются глубокие связи между ними, доказываются интересные теоремы. Часть получаемых свойств удивительным образом оказывается уже знакомой из главы 2, посвященной теории поверхностей, что еще более подчеркивают взятые оттуда поясняющие примеры.

Отличие римановых пространств от евклидовых часто оказывается весьма значительным. Впрочем, евклидовы пространства сами являются частным случаем римановых (когда тензор Римана—Кристоффеля тождественно равен нулю).

И еще об одном. Привлекаемый к изложению этой главы геометрический язык позволяет глубже осмыслить формулы, полученные в конце предыдущей главы.

§ 1. РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО

1°. Определение римановой метрики

Пусть $\{M\}$ — открытое множество из пространства \mathbb{R}^n . Рассмотрим во множестве $\{M\}$ поле симметричного тензора

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n),$$

где x^1, \dots, x^n — координаты точки M . Подчиним поле g_{ij} следующему требованию:

квадратичная дифференциальная форма

$$g_{ij}dx^i dx^j \tag{1}$$

(квадратичная форма от дифференциалов координат) в каждой точке множества

1) невырождена и

2) имеет постоянную сигнатуру (нормальный вид квадратичной формы (1) не зависит от выбора точки из множества $\{M\}$).

Форму (1) обозначают через ds^2 :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2)$$

и называют *линейным элементом*.

При этом говорят, что форма (2) определяет в открытом множестве $\{M\}$ *риманову метрику*. Поясним, что под этим понимается.

Рассмотрим в области $\{M\}$ гладкую кривую L , определяемую параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (i=1, \dots, n).$$

Длину кривой L определим посредством соотношения

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt. \quad (3)$$

Таким образом, при помощи линейного элемента (2) в области $\{M\}$ можно вычислять длины кривых.

Это и означает, что форма (2) определяет метрику в области $\{M\}$.

Впервые такой способ введения метрики был предложен Риманом в 1854 г.

Множество $\{M\}$ точек из пространства \mathbb{R}^n , в котором введена риманова метрика, называется *n -мерным римановым пространством*. Будем обозначать его через V^n .

Тензор g_{ij} , определяющий риманову метрику, называется *метрическим тензором* риманова пространства.

В римановых пространствах можно построить содержательную геометрию — *риманову геометрию*. Эти пространства находят широкое применение в механике и физике.

Обычно *римановыми* пространствами называют пространства, в которых метрика определяется положительной формой (1). Если же форма (1) является знакопеременной, то пространство называют *псевдоримановым*.

Мы ограничимся подробным рассмотрением римановых пространств с положительно определенной формой.

2°. Примеры римановых пространств

Пример 1. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^n относительно заданной системы координат $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ тензор

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

перейдут в функции

$$'g_{ij}(x) = g_{ij}(x^1(x^1, \dots, x^n), \dots, x^n(x^1, \dots, x^n)).$$

Будем считать выполненными следующие условия:

1) функции (1) имеют в области изменения переменных x^1, \dots, x^n непрерывные третьи частные производные по всем аргументам;

2) якобиан

$$\det J_{x \rightarrow x} = \frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(x^1, \dots, x^n)}$$

отображения, задаваемого правилом (1), отличен от нуля во всех точках области изменения переменных x^1, \dots, x^n ;

3) отображение (1) обратимо.

Тогда, как известно из курса математического анализа, функции $g_{ij}(x)$ также будут обладать непрерывными вторыми частными производными по всем аргументам.

Перейдем к определению касательного пространства.

Пусть $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$ — некоторая точка риманова пространства V^n с метрическим тензором $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$. Разложим каждую компоненту метрического тензора, пользуясь формулой Тейлора* с центром в точке M_0 . Получим

$$g_{ij}(x^1, \dots, x^n) = g_{ij}(x_0^1, \dots, x_0^n) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(x_0^1, \dots, x_0^n)(x^k - x_0^k) + \varepsilon_{ijk} \cdot (x^k - x_0^k), \quad (2)$$

где

$$\varepsilon_{ijk} \rightarrow 0$$

при

$$\rho = \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2} \rightarrow 0,$$

т. е. $\varepsilon_{ijk} = o(1)$.

Определение. Евклидово пространство E^n с линейным элементом

$$ds_0^2 = g_{ij}(x_0^1, \dots, x_0^n) dx^i dx^j \quad (3)$$

называется *касательным евклидовым пространством* в точке $M_0(x_0) = M_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$ риманова пространства V^n .

Запишем выражение для линейного элемента

$$ds^2 = g_{ij}'(x^1, \dots, x^n) dx^i dx^j,$$

* Тейлор (Taylor) Брук (18.8.1685—29.12.1731) — английский математик.

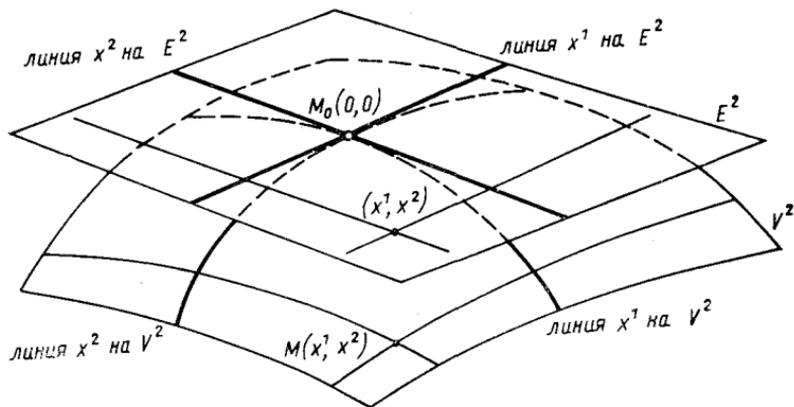


Рис. 1. На рисунке касательное пространство E^2 в точке M_0 риманова пространства V^2 изображено в виде касательной плоскости к поверхности V^2 . Точке $M(x^1, x^2)$ на V^2 отвечает точка (x^1, x^2) на E^2

Введем следующее обозначение:

$$\left. \frac{\partial x^i}{\partial' x^k} \right|_{M_0} = \kappa_k^i$$

и предположим, что преобразование (6) переводит точку $M_0(0, \dots, 0)$ в себя, т. е.

$$x^i(0, \dots, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда формула (7) в точке M_0 может быть записана так:

$$'g_{kl}(0, \dots, 0) = g_{ij}(0, \dots, 0) \kappa_k^i \kappa_l^j \quad (8)$$

или, короче,

$$'g_{kl}^0 = g_{ij}^0 \kappa_k^i \kappa_l^j.$$

Тем самым в касательном пространстве E^n координаты x^i преобразуются по формулам

$$x^i = \kappa_k^i x'^k \quad (i = 1, \dots, n), \quad (9)$$

т. е. в касательном пространстве происходит линейное преобразование координат с матрицей (κ_k^i) .

Матрица (κ_k^i) этого линейного преобразования невырождена, так как

$$\det(\kappa_k^i) = \det \left(\left. \frac{\partial x^i}{\partial' x^k} \right|_{M_0} \right) = \frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(x'^1, \dots, x'^n)} \Big|_{M_0} \neq 0.$$

Правые части преобразований (9) координат пространства E^n представляют собой линейные члены разложений функций

$$x^i = x^i(x'^1, \dots, x'^n), \quad i = 1, \dots, n,$$

по формуле Тейлора:

$$x^i('x^1, \dots, 'x^n) = x_k^i 'x^k + o(\sqrt{'x^1^2 + \dots + 'x^n^2}).$$

З а м е ч а н и е. Преобразование (9) можно рассматривать как простейший вид преобразований координат в пространстве V^n . В этом случае преобразование координат в пространстве V^n и соответствующее ему преобразование координат в касательном пространстве совпадают.

3°. Локально нормальные координаты

О п р е д е л е н и е. Координаты (x^i) в римановом пространстве V^n называются *нормальными в точке $M_0(0, \dots, 0)$* или *локально нормальными*, если

$$g_{ij}^0 = g_{ij}|_{M_0} = g_{ij}(0, \dots, 0) = \delta_{ij}, \quad (10)$$

$$g_{ij,k}^0 = \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_{M_0} = 0. \quad (11)$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. В окрестности каждой точки риманова пространства можно ввести координаты, нормальные в этой точке.

* Доказательство теоремы разобьем на два этапа.

А. Покажем сначала, как можно выбрать систему координат $('x^i)$, чтобы в точке M_0 выполнялись условия (10).

Обратимся к невырожденным линейным преобразованиям вида (9). Метрический тензор в точке M_0 изменяется по следующему правилу:

$$'g_{kl}^0 = g_{ij}^0 \kappa_k^i \kappa_l^j.$$

Из курса линейной алгебры известно, что для любой положительно определенной симметричной матрицы (g_{ij}^0) можно указать невырожденное линейное преобразование с матрицей (κ_k^i) , приводящее эту матрицу к единичной (δ_{ij}) :

$$g_{ij}^0 \kappa_k^i \kappa_l^j = \delta_{kl}.$$

Б. Будем считать, что условия (10) выполнены, т. е. исходные координаты (x^i) в окрестности точки M_0 таковы, что $g_{ij}^0 = \delta_{ij}$.

Укажем преобразование координат (x^i) , сохраняющее равенства (10) и обеспечивающее выполнение условий (11).

Обратимся к формулам (5) пункта 2 § 8 главы 3, записав их применительно к принятым здесь обозначениям. Имеем

$$x^i = 'x^i - \frac{1}{2} \Gamma_{kl}^i(M_0) 'x^k 'x^l. \quad (12)$$

Убедимся в том, что преобразование (12) сохраняет равенства (10). В самом деле,

$$\frac{\partial x^i}{\partial' x^k} \Big|_{M_0} = \delta_k^i \quad (13)$$

и поэтому

$${}^0 g_{kl} = g_{ij} \delta_k^i \delta_l^j = \delta_{ij} \delta_k^i \delta_l^j = \delta_{kl}. \quad (14)$$

В пункте 2 § 8 главы 3 было показано, что преобразование координат (12) обеспечивает в точке M_0 выполнение равенств

$$\Gamma_{lm}^q(M_0) = 0 \quad (15)$$

(см. А).

Из формул (14) и (15) пункта 2 § 8 главы 3 вытекает, что в точке M_0 обращаются в нуль и символы Кристоффеля 1-го рода:

$$\Gamma_{q,lm}(M_0) = 0 \quad (16)$$

и первые производные метрического тензора:

$${}^0 g_{ij,k} = \frac{\partial' g_{ij}}{\partial' x^k} \Big|_{M_0} = 0.$$

Итак, в точке M_0 в системе координат (x) выполняются условия

$${}^0 g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial' g_{ij}}{\partial' x^k} = 0.$$

Тем самым система координат (x) является нормальной в точке M_0 . *

Замечание. Пусть $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ — система координат в пространстве V^n , нормальная в точке $M_0(0, \dots, 0)$. Тогда разложение компонент $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ метрического тензора по локальной формуле Тейлора с центром в точке M_0 имеет следующий вид:

$$g_{ij}(x^1, \dots, x^n) = \delta_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \Big|_{M_0} x^k x^l + \varepsilon_{ijkl} x^k x^l, \quad (17)$$

где $\varepsilon_{ijkl} \rightarrow 0$ при $(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (0, \dots, 0)$.

Из разложения (17) следует, что если система координат является нормальной в точке M_0 , то отображение окрестности точки M_0 в пространстве V^n на окрестность этой точки в касательном пространстве E^n обладает следующим свойством: ds^2 отличается от ds_0^2 на малые второго порядка относительно $\rho = \sqrt{x^1^2 + \dots + x^n^2}$.

4°. Каноническое разложение метрического тензора

Выбор в римановом пространстве V^n координат, нормальных в данной точке M_0 , удобен тем, что в малой окрестности этой точки метрика пространства V^n отличается от метрики касательного пространства E^n на малые второго порядка относительно ρ . Естественно возникает вопрос: нельзя ли выбрать координатную систему так, чтобы метрики ds^2 и ds_0^2 пространств V^n и E^n отличались на малые более высокого порядка относительно ρ (выше второго)?

Оказывается, в общем случае такой выбор невозможен.

Покажем, что является препятствием к этому.

Естественно ограничиться рассмотрением координатных систем, нормальных в точке M_0 , так как только в них

$$g_{ij,k} = \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_{M_0} = 0.$$

Если бы координатная система с искомым свойством нашлась, то тогда, согласно разложению (17), в точке M_0 имели бы место равенства

$$\left. \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \right|_{M_0} = 0.$$

Согласно формуле (19) пункта 5 § 9 главы 3 все компоненты R_{mqhl} тензора Римана—Кристоффеля в точке M_0 обращались бы в нуль. Однако легко привести примеры римановых пространств, для которых этот тензор не равен нулю. В частности, тензор Римана—Кристоффеля пространства Лобачевского не равен нулю ни в одной точке.

Приведенные рассуждения наводят на мысль о том, что в некоторых координатных системах, определенным образом связанных с заданной точкой M_0 , разложение компонент g_{ij} метрического тензора пространства V^n по формуле Тейлора должно иметь специальный, канонический вид, в котором члены второго порядка малости относительно ρ должны быть как-то связаны с компонентами R_{ijkl} тензора Римана—Кристоффеля в точке M_0 .

ТЕОРЕМА 2. Пусть V^n — произвольное риманово пространство и M_0 — заданная точка пространства V^n . Тогда существует координатная система (x^i) , нормальная в точке M_0 и такая, что разложение компонент $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ метрического тензора пространства V^n по формуле Тейлора с центром в точке M_0 имеет следующий вид:

$$g_{kq}(x^1, \dots, x^n) = \delta_{kq} - \frac{1}{3} \overset{0}{R}_{mklq} x^m x^l + o(\rho^2), \quad (18)$$

где $\rho = \sqrt{x^1{}^2 + \dots + x^n{}^2}$, а $\overset{0}{R}_{mklq}$ — компоненты тензора Римана—Кристоффеля, вычисленные в точке $M_0(0, \dots, 0)$:

$$\overset{0}{R}_{mklq} = R_{mklq}(0, \dots, 0).$$

* Пусть (x^i) — нормальные координаты в точке M_0 , $x^i(M_0) = 0$. Покажем, как малым изменением координат (x^i) перейти к новым нормальным в точке M_0 координатам (x^i) , в которых справедливо каноническое разложение вида (18).

Обратимся к формулам (10) пункта 2 § 8 главы 3, записав их применительно к используемым здесь обозначениям. Имеем

$$x^i = x^i - \frac{1}{18} \Gamma_{klm}^i(M_0) x^k x^l x^m, \quad (19)$$

где

$$\Gamma_{klm}^i = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{lm}^i + \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{mk}^i + \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{kl}^i. \quad (20)$$

Убедимся в том, что система координат (x) также является нормальной в точке M_0 .

Достаточно показать, что

$$g_{kl}|_{M_0} = \delta_{kl}, \quad \left. \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right|_{M_0} = 0. \quad (21)$$

Рассмотрим тождества

$$\begin{aligned} g_{kl} &= g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^l}, \\ \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial x^m} \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^l} + \\ &+ g_{ij} \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^j}{\partial x^l} + \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^l \partial x^m} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Так как система координат (x^i) нормальна в точке M_0 , то

$$g_{ij}|_{M_0} = \delta_{ij}, \quad \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} \right|_{M_0} = 0.$$

Непосредственными вычислениями несложно убедиться в справедливости равенств

$$\left. \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \right|_{M_0} = \delta_k^i, \quad \left. \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k \partial x^l} \right|_{M_0} = 0.$$

Рассматривая теперь соотношения (22) в точке M_0 , получаем формулы (21).

В 2° § 8 главы 3 было показано, что преобразование координат (19) обеспечивает выполнение равенств

$$\Gamma_{klm}^q(M_0) = 0 \quad (23)$$

(см. Б).

Кроме того, из формул (21) вытекает, что в точке M_0 все символы Кристоффеля равны нулю:

$$\Gamma_{ij}^k(M_0) = 0. \quad (24)$$

Вычислим в точке M_0 компоненты $'R^q{}_{lkm}$ тензора Римана—Кристоффеля:

$$'R^q{}_{lkm} = \frac{\partial' \Gamma^q{}_{lm}}{\partial' x^k} - \frac{\partial' \Gamma^q{}_{lk}}{\partial' x^m} + \Gamma^q{}_{pk} \Gamma^p{}_{lm} - \Gamma^q{}_{pm} \Gamma^p{}_{lk}$$

(см. формулу (8) пункта 3 § 9 главы 3).

В силу условия (24) получаем, что

$$'R^q{}_{lkm} \Big|_{M_0} = \frac{\partial' \Gamma^q{}_{lm}}{\partial' x^k} (M_0) - \frac{\partial' \Gamma^q{}_{lk}}{\partial' x^m} (M_0). \quad (25)$$

Переставляя в последней формуле индексы l и m местами, найдем

$$'R^q{}_{mki} = \frac{\partial' \Gamma^q{}_{ml}}{\partial' x^k} (M_0) - \frac{\partial' \Gamma^q{}_{mk}}{\partial' x^l} (M_0). \quad (26)$$

Распишем соотношение (23) подробно:

$$0 = \frac{\partial' \Gamma^q{}_{lm}}{\partial' x^k} (M_0) + \frac{\partial' \Gamma^q{}_{mk}}{\partial' x^l} (M_0) + \frac{\partial' \Gamma^q{}_{kl}}{\partial' x^m} (M_0) \quad (27)$$

(см. формулу (20)).

Складывая последние три равенства и учитывая симметричность символов $\Gamma^q{}_{pr}$, получаем важную формулу

$$\frac{\partial' \Gamma^q{}_{lm}}{\partial' x^k} (M_0) = \frac{1}{3} ('R^q{}_{lkm} + 'R^q{}_{mkl}). \quad (28)$$

Умножим обе части равенства (28) на $'g_{pq}$ и, просуммировав по q , с учетом формулы (13) пункта 5 § 9 главы 3 получим

$$'g_{pq} \frac{\partial' \Gamma^q{}_{lm}}{\partial' x^k} (M_0) = \frac{1}{3} ('R_{plkm} + 'R_{pmkl}). \quad (29)$$

Чтобы преобразовать левую часть соотношения (29), рассмотрим тождество

$$'g_{pq} \frac{\partial' \Gamma^q{}_{lm}}{\partial' x^k} = \frac{\partial}{\partial' x^k} (\Gamma_{p,lm}) - \Gamma^q{}_{lm} \frac{\partial' g_{pq}}{\partial' x^k}, \quad (30)$$

где

$$\Gamma_{p,lm} = 'g_{pq} \Gamma^q{}_{lm}.$$

Заменим в формуле (30) символ $\Gamma_{p,lm}$ его выражением

$$\Gamma_{p,lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial' g_{pl}}{\partial' x^m} + \frac{\partial' g_{pm}}{\partial' x^l} - \frac{\partial' g_{lm}}{\partial' x^p} \right)$$

и проведем необходимые дифференцирования.

Отнеся полученное соотношение к точке M_0 и учитывая равенства (21), найдем для формулы (29) следующее выражение:

$$\frac{1}{2} ('g_{pl,mk}^0 + 'g_{pm,lk}^0 - 'g_{lm,pk}^0) = \frac{1}{3} ('R_{plkm}^0 + 'R_{pmkl}^0). \quad (31)$$

Здесь использовано удобное обозначение

$$'g_{pl,mk}^0 = \frac{\partial^2 'g_{pl}}{\partial 'x^m \partial 'x^k} (M_0).$$

Меняя в равенстве (31) индексы k и p местами и учитывая свойство симметричности тензора R_{mqkl} :

$$R_{mqkl} = R_{kltq}$$

(см. пункт 5° § 9 главы 3), получим

$$\frac{1}{2} ('g_{kl,mp}^0 + 'g_{km,lp}^0 - 'g_{lm,kp}^0) = \frac{1}{3} ('R_{pmkl}^0 + 'R_{plkm}^0). \quad (32)$$

Обратившись к формуле (19) пункта 5 § 9 главы 3, запишем в точке M_0 выражения для компонент $'R_{plkm}^0$ и $'R_{pmkl}^0$:

$$'R_{plkm}^0 = \frac{1}{2} ('g_{pm,lk}^0 + 'g_{lk,pm}^0 - 'g_{pk,lm}^0 - 'g_{lm,pk}^0),$$

$$'R_{pmkl}^0 = \frac{1}{2} ('g_{pl,mk}^0 + 'g_{mk,pl}^0 - 'g_{pk,ml}^0 - 'g_{lm,pk}^0).$$

Сложив эти равенства, сгруппируем нужным образом производные в правой части. Имеем

$$\begin{aligned} 'R_{plkm}^0 + 'R_{pmkl}^0 &= -'g_{pk,lm}^0 + \frac{1}{2} ('g_{pm,lk}^0 + 'g_{pl,mk}^0 - 'g_{lm,pk}^0) + \\ &+ \frac{1}{2} ('g_{lk,pm}^0 + 'g_{mk,pl}^0 - 'g_{ml,pk}^0). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом формул (31) и (32) получаем

$$\begin{aligned} 'R_{plkm}^0 + 'R_{pmkl}^0 &= -'g_{pk,lm}^0 + \frac{1}{3} ('R_{plkm}^0 + 'R_{pmkl}^0) + \\ &+ \frac{1}{3} ('R_{pmkl}^0 + 'R_{plkm}^0). \end{aligned}$$

Теперь уже нетрудно увидеть, что

$$'g_{pk,lm}^0 = -\frac{1}{3} ('R_{plkm}^0 + 'R_{pmkl}^0). \quad (33)$$

Так как построенная координатная система ($'x$) является нормальной в точке M_0 , то для компонент метрического тензора

работает формула (17). Запишем эту формулу в удобном для нас виде:

$$'g_{pk}('x^1, \dots, 'x^n) = \delta_{pk} + \frac{1}{2} 'g_{pk,lm}^0 'x^l 'x^m + o(\rho^2).$$

Подставим сюда выражение (33) для производных $'g_{pk,lm}^0$. Получим

$$'g_{pk}('x^1, \dots, 'x^n) = \delta_{pk} - \frac{1}{6} ('R_{plkm}^0 + 'R_{pmkl}^0) 'x^l 'x^m + o(\rho^2).$$

Так как

$$'R_{plkm}^0 'x^l 'x^m = 'R_{pmkl}^0 'x^l 'x^m,$$

то окончательно имеем

$$'g_{pk}('x^1, \dots, 'x^n) = \delta_{pk} - \frac{1}{3} 'R_{plkm}^0 'x^l 'x^m + o(\rho^2). *$$

ВАЖНЫЙ ВЫВОД. Характерным свойством евклидова пространства является наличие такой системы координат, относительно которой метрический тензор в каждой точке равен δ_{kq} . Из проведенных рассуждений следует, что если тензор R_{mkjq} не нулевой, то в римановом пространстве нельзя найти систему координат, в которой его метрический тензор был бы равен δ_{kq} . Более того, только что доказанная формула (18) канонического представления метрического тензора показывает, что тензор R_{mkjq} можно рассматривать как меру отклонения риманова пространства V^n от евклидова E^n . Поэтому обычно говорят, что тензор Римана—Кристоффеля характеризует искривленность риманова пространства, и называют его *тензором кривизны*.

§ 3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ

1°. Параллельный перенос векторов в евклидовом пространстве

Пусть (x^i) — криволинейные координаты в n -мерном евклидовом пространстве E^n . Радиус-вектор точки M из пространства E^n обозначим через x (O — начальная точка). Векторы

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial x^i} \quad (i=1, \dots, n)$$

образуют в точке M базис. Этот базис зависит от точки, т. е. от координат x^1, \dots, x^n .

Рассмотрим в пространстве E^n некоторый вектор ξ . Будем переносить вектор ξ параллельно самому себе вдоль кривой $\overline{M_0M_1}$, заданной параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1), \quad (i=1, \dots, n). \quad (1)$$

Так как в каждой точке M этой кривой существует свой базис

$$x_1(M), \dots, x_n(M),$$

то координаты (постоянного) вектора ξ при переходе от точки к точке кривой (1) будут меняться (рис. 2).

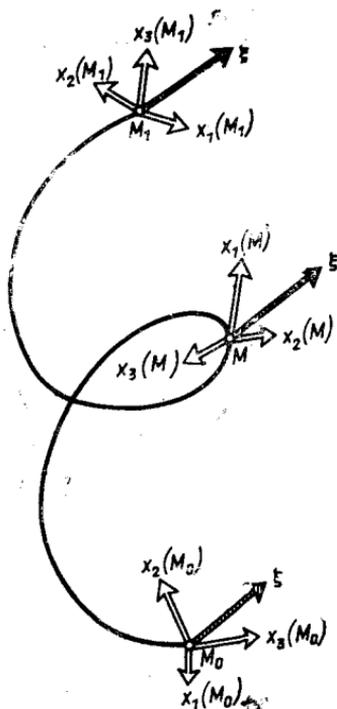


Рис. 2. Параллельный перенос вектора ξ вдоль кривой

Выясним характер изменения этих координат. Вследствие того, что вектор ξ — постоянный, имеем

$$d\xi = 0.$$

Отсюда, пользуясь разложением

$$\xi = \xi^i x_i,$$

получаем, что

$$d\xi^i x_i + \xi^i dx_i = 0. \quad (2)$$

Далее,

$$dx_i = d\left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial x^i \partial x^j} dx^j = x_{ij} dx^j. \quad (3)$$

Разложив векторы x_{ij} по базису x_k

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k, \quad (4)$$

из формулы (3) найдем, что

$$dx_i = \Gamma_{ij}^k x_k dx^j. \quad (5)$$

Преобразуем равенство (2).

В первой группе слагаемых заменим индекс суммирования i на k ; во второй группе заменим дифференциалы dx_i их выражениями (5). В результате получим

$$(d\xi^k + \Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j) x_k = 0.$$

Вследствие линейной независимости векторов x_k все коэффициенты в последнем разложении равны нулю:

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j \quad (k=1, \dots, n). \quad (6)$$

Рассмотрим полученные соотношения (6).

Входящие в них величины Γ_{ij}^k уже знакомы нам (см. формулу (1) пункта 1 § 8 главы 3). Это символы Кристоффеля 2-го рода. Их называют также *коэффициентами связности* — они связывают координаты ξ^i вектора ξ в точке (x^1, \dots, x^n) с координатами $\xi^i + d\xi^i$ этого вектора в близкой точке $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$.

Соотношения (6) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестными являются координаты $\xi^i(t)$ вектора ξ , параллельно переносимого вдоль кривой, $\overline{M_0 M_1}$. Интегрируя эту систему, находим координаты $\xi^i(t)$ вектора ξ в произвольной точке $M(t)$ кривой $\overline{M_0 M_1}$ (в базисе $x_i(M(t))$).

В дальнейшем соотношения (6) мы будем называть *уравнениями параллельного переноса вектора*.

З а м е ч а н и е. При переходе к другой криволинейной системе координат система (6) уравнений параллельного переноса вектора изменяется. Будут меняться и символы Кристоффеля. Характер их изменения подробно освещен в § 8 главы 3 (см. 1°). Там же (3° § 8) получены формулы, по которым символы Кристоффеля Γ_{ij}^k 2-го рода и символы Кристоффеля $\Gamma_{k,ij} = g_{ki} \Gamma_{ij}^l$ 1-го рода выражаются через компоненты метрического тензора g_{ij} .

По мере необходимости мы будем пользоваться этими формулами.

2°. Векторы в римановом пространстве

Ранее уже отмечалось, что произвольное риманово пространство отличается от евклидова, является более общим. Поэтому естественно обсудить вопрос о том, что понимать под вектором в таком пространстве.

Поступим следующим образом. Зададим в данной точке $M_0(x^1, \dots, x^n)$ риманова пространства V^n n чисел ξ^1, \dots, ξ^n . Будем считать эти числа координатами вектора ξ в точке M_0 .

Сразу же возникает вопрос: в каком базисе числа ξ^1, \dots, ξ^n являются координатами вектора ξ ?

Для ответа на этот вопрос воспользуемся понятием касательного пространства.

Мы знаем, что если $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ — метрический тензор пространства V^n , то $g_{ij}^0 = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ — метрический тензор касательного пространства E^n риманова пространства V^n в точке M_0 . Тем самым в пространстве E^n налицо прямолинейная косоугольная система координат с началом в данной точке M_0 : с каждой x^i -линией (это прямая в E^n) связан вектор e_i , длина которого равна $|e_i| = \sqrt{g_{ii}^0}$, а угол φ_{ij} между векторами e_i и e_j вычисляется по формуле

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{\langle e_i, e_j \rangle}{|e_i| \cdot |e_j|} = \frac{g_{ij}^0}{\sqrt{g_{ii}^0} \sqrt{g_{jj}^0}}.$$

Из теории поверхностей (глава 2) мы знаем, что измерения на поверхности проводятся при помощи первой квадратичной формы

$$I = ds^2 = g_{11} dx^{1^2} + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^{2^2} = g_{ij} dx^i dx^j,$$

т. е. поверхность представляет собой двумерное риманово пространство V^2 .

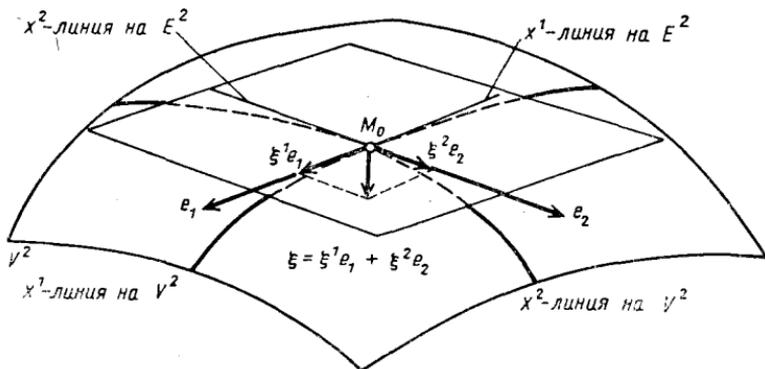


Рис. 3. На рисунке изображена поверхность, представляющая собой двумерное риманово пространство V^2

Касательную плоскость к поверхности в точке M_0 можно рассматривать как касательное пространство E^2 в точке M_0 пространства V^2 (рис. 3). Координатные линии x^1 и x^2 на E^2 — касательные прямые в точке M_0 к координатным линиям x^1 и x^2 на

V^2 . Векторы e_1 и e_2 направлены соответственно по линиям x^1 и x^2 на E^2 , причем

$$|e_1| = \sqrt{g_{11}^0}, \quad |e_2| = \sqrt{g_{22}^0}, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = g_{12}^0,$$

а угол φ между этими векторами определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{|e_1| |e_2|} = \frac{g_{12}^0}{\sqrt{g_{11}^0 g_{22}^0}}.$$

Вернемся к общему случаю.

Пусть e_1, \dots, e_n — базис в касательном пространстве E^n . Тогда по заданным числам ξ^1, \dots, ξ^n определяется вектор

$$\xi = \xi^1 e_1 + \dots + \xi^n e_n = \xi^i e_i,$$

расположенный в пространстве E^n . Так что вектор ξ имеет координаты ξ^i в базисе e_i .

Перейдем в пространстве V^n к другим координатам

$$x^i = x^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i=1, \dots, n).$$

Базисные векторы e_i касательного пространства E^n в точке M_0 преобразуются по формулам

$$'e_k = e_i a_k^i \quad (k=1, \dots, n), \quad (7)$$

где

$$a_k^i = \left. \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \right|_{M_0}.$$

Наряду с формулами (7) имеются также и формулы

$$e_i = 'e_k a_i^k \quad (i=1, \dots, n), \quad (8)$$

перехода от базиса $'e_k$ к базису e_i , где $'a_i^k = \left. \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right|_{M_0}$.

Пользуясь формулами (8), получим

$$\xi = \xi^i e_i = \xi^i 'e_k a_i^k = (\xi^i a_i^k) 'e_k. \quad (9)$$

С другой стороны,

$$\xi = '\xi^k e_k. \quad (10)$$

Из соотношений (9) и (10) получаем формулы, связывающие координаты $'\xi^k$ и ξ^i вектора ξ :

$$'\xi^k = \xi^i a_i^k \quad (k=1, \dots, n). \quad (11)$$

Аналогично выводятся формулы перехода от $'\xi^k$ и ξ^i :

$$\xi^i = '\xi^k a_k^i \quad (i=1, \dots, n). \quad (12)$$

Определение. Вектором ξ в точке M_0 риманова пространства V^n называется упорядоченный набор n чисел ξ^1, \dots, ξ^n — *координат вектора* ξ , преобразующийся при переходе от координатной системы (x^i) к координатной системе (x^k) по формулам (11) и (12), где

$$a_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \Big|_{M_0}, \quad 'a_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \Big|_{M_0}.$$

Геометрически вектор ξ можно представлять себе как обычный вектор в касательном пространстве E^n .

3°. Параллельный перенос векторов в римановом пространстве

Рассмотрим в пространстве V^n кривую $\overline{M_0 M_1}$, соединяющую точки M_0 и M_1 и заданную параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1), \quad (i=1, \dots, n). \quad (13)$$

Пусть в точке M_0 пространства V^n задан вектор ξ . Определим операцию параллельного переноса этого вектора в пространстве V^n вдоль кривой $\overline{M_0 M_1}$.

В основу этого определения можно положить следующие геометрические соображения.

В § 2 этой главы мы уже отмечали, что в окрестности точки M_0 риманово пространство V^n отличается от касательного к нему в этой точке евклидова пространства E^n на малые второго порядка (относительно размеров рассматриваемой окрестности). Это обстоятельство наводит на мысль о том, что малый параллельный перенос вектора ξ по направлению (dx^1, \dots, dx^n) в пространстве E^n можно рассматривать так же, как параллельный перенос вектора ξ в этом же направлении в пространстве V^n . (Упорядоченный набор дифференциалов координат (dx^1, \dots, dx^n) — вектор, тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, в пространстве E^n : при переходе к новым координатам $'x^i$ эти дифференциалы преобразуются по тем же формулам (11), что и векторы в E^n или в V^n :

$$d'x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \Big|_{M_0} (dx^k = 'a_k^i dx^k.)$$

Иными словами, уравнения (6) можно рассматривать не только как уравнения параллельного переноса в пространстве E^n , но и как уравнения параллельного переноса вдоль кривой (13) в римановом пространстве V^n .

Отметим, что ряд дальнейших рассуждений подтверждает правильность такого геометрического подхода к определению параллельного переноса в римановом пространстве.

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j \quad (14)$$

называются *уравнениями параллельного переноса* вектора $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ в римановом пространстве V^n .

Эти уравнения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестными являются координаты $\xi^i(t)$ вектора ξ , параллельно переносимого вдоль кривой $\overline{M_0 M_1}$, заданной в пространстве V^n параметрическими уравнениями (13).

4°. Параллельный перенос тензоров

Операция параллельного переноса векторов в римановом пространстве важна в следующем отношении. Пусть в пространстве V^n задано векторное поле. Возникает естественный вопрос: как сравнивать векторы этого поля в различных точках пространства V^n , в частности в близких точках? Дело в том, что возможность сравнения в близких точках позволит ввести понятие дифференциала векторного поля в римановом пространстве V^n как главной линейной части приращения.

Такое сравнение проводится при помощи параллельного переноса. Вектор ξ_1 в точке M_1 можно сравнить с вектором ξ_2 в точке M_2 следующим образом.

Перенесем вектор ξ_2 из точки M_2 в точку M_1 параллельно вдоль кривой $\overline{M_2 M_1}$. Получим в точке M_1 два вектора: ξ_1 и ξ_2^* . Разность $\xi_2^* - \xi_1$ будем рассматривать как результат сравнения векторов ξ_1 и ξ_2 в точках M_1 и M_2 .

Ясно, что результат параллельного переноса вектора ξ_2 в точку M_1 зависит от кривой $\overline{M_1 M_2}$. Впрочем, о способе ее выбора можно договориться.

Пусть в пространстве V^n задано тензорное поле.

Для сравнения тензоров этого поля в разных точках пространства V^n необходимо ввести операцию параллельного переноса тензоров.

Обратимся к описанию соответствующей процедуры.

Перенесем базисные векторы касательного пространства E^n , определенные заданной системой координат (x^i) в данной точке M , параллельно в близкую точку M' . Рассмотрим в точке M' тензор с теми же компонентами относительно параллельно перенесенного базиса, что и у тензора в точке M .

В точке M' естественно возникают два базиса:

- 1) базис, параллельно перенесенный в точку M' , и
- 2) базис, определяемый в точке M' заданной системой координат (x^i) .

Преобразуем первый из этих базисов во второй. При этом преобразованию подвергнутся и компоненты тензора. Будем рассмат-

ривать приращения компонент тензора, получаемые в результате описанной процедуры как приращения его компонент при параллельном переносе.

Пусть e_i — базис касательного пространства E^n в точке M , определяемый системой координат (x^i) в окрестности точки M пространства V^n (см. 2°), и ξ_k — какой-нибудь другой базис в E^n , причем

$$\xi_k = \xi_k^i e_i \quad (k=1, \dots, n).$$

Рассмотрим в точке M тензор T типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ с компонентами T_{lm}^{ij} относительно базиса e_i . Пусть $'T_{rs}^{pq}$ — компоненты тензора T в базисе ξ_k . Тогда

$$'T_{rs}^{pq} = T_{lm}^{ij} \xi_i^p \xi_j^q \xi_r^l \xi_s^m, \quad (15)$$

где $\xi_i^p \xi_s^i = \delta_s^p$.

Из соотношений (15) получаем, что

$$\xi_p^i \xi_q^j 'T_{rs}^{pq} = \xi_r^l \xi_s^m T_{lm}^{ij}. \quad (16)$$

Пусть векторы ξ_1, \dots, ξ_n параллельно переносятся вдоль некоторой кривой L в пространстве V^n и M — произвольная точка этой кривой.

Определение. Будем говорить, что тензор T переносится параллельно вдоль кривой L , если в каждой точке $M \in L$ его компоненты $'T_{rs}^{pq}$ сохраняют постоянное значение относительно параллельно переносимого базиса ξ_k , т. е.

$$'T_{rs}^{pq} = \text{const}. \quad (17)$$

Другими словами, в параллельно переносимом базисе мы имеем один и тот же тензор.

Свойство (17) будет сохраняться для любого базиса, ибо по свойствам параллельного перенесения векторов матрица перехода от одного базиса к другому при параллельном переносе не изменяется.

Вычислим дифференциалы левой и правой частей равенства (16) в точке M .

С учетом соотношений (17) получим

$$d \xi_p^i \xi_q^j 'T_{rs}^{pq} + \xi_p^i d \xi_q^j 'T_{rs}^{pq} = d \xi_r^l \xi_s^m T_{lm}^{ij} + \xi_r^l d \xi_s^m T_{lm}^{ij} + \xi_r^l \xi_s^m d T_{lm}^{ij}. \quad (18)$$

Так как векторы ξ_p переносятся параллельно, то, согласно формуле (14), имеем

$$d \xi_p^i = -\Gamma_{kt}^i \xi_p^t dx^k. \quad (19)$$

Будем считать, что базис ξ_p в точке M совпадает с базисом e_k , определяемым в этой точке системой координат x^i . Тогда

$$'T_{lm}^{ij} = T_{lm}^{ij}, \quad \xi_k^i = \delta_k^i. \quad (20)$$

Последнее соотношение позволяет записать формулы (19) короче:

$$d\xi_p^i = -\Gamma_{kp}^i dx^k. \quad (21)$$

Подставим найденные выражения (20) и (21) для T_{lm}^{ij} , ξ_k^i и $d\xi_p^i$ в равенство (18). Имеем

$$-\Gamma_{kp}^i dx^k T_{rs}^{pj} - \Gamma_{kq}^j dx^k T_{rs}^{iq} = -\Gamma_{kr}^l dx^k T_{ls}^{ij} - \Gamma_{ks}^m dx^k T_{rm}^{ij} + dT_{rs}^{ij}.$$

Перегруппировав слагаемые в последнем соотношении и изменив обозначения некоторых индексов суммирования, получим

$$dT_{rs}^{ij} = (-\Gamma_{kp}^i T_{rs}^{pj} - \Gamma_{kp}^j T_{rs}^{ip} + \Gamma_{kr}^p T_{ps}^{ij} + \Gamma_{ks}^p T_{rp}^{ij}) dx^k. \quad (22)$$

Это формула для дифференциалов компонент тензора T типа $\binom{2}{2}$ при параллельном переносе — формула параллельного переноса тензора.

Для общего случая — тензора типа $\binom{p}{q}$ — формула параллельного переноса тензора имеет следующий вид:

$$dT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = \left(-\Gamma_{km}^{i_1} T_{i_1 \dots i_q}^{mi_2 \dots i_p} - \dots - \Gamma_{km}^m T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_{p-1} m} + \Gamma_{kj_1}^m T_{mj_2 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \dots + \Gamma_{kj_q}^m T_{i_1 \dots i_{q-1} m}^{i_1 \dots i_p} \right) dx^k. \quad (23)$$

5°. Абсолютный дифференциал и абсолютная производная

Пусть на кривой

$$x^i = x^i(t)$$

в римановом пространстве V^n задано тензорное поле $T(t)$. Будем считать для определенности, что это поле типа $\binom{2}{2}$.

Перейдем из точки кривой $x^i(t)$, отвечающей значению t параметра, в точку $x^i(t+dt)$, отвечающую значению $t+dt$, и найдем в ней тензор заданного поля $T(t)$ с компонентами

$$T_{rs}^{ij}(t+dt) \approx T_{rs}^{ij}(t) + dT_{rs}^{ij}(t).$$

Здесь мы пренебрегли малыми высшего порядка относительно dt , заменив приращения функций $T_{rs}^{ij}(t)$ их дифференциалами. Отметим, что $T_{rs}^{ij}(t)$ и

$$T_{rs}^{ij}(t) + dT_{rs}^{ij}(t) \approx T_{rs}^{ij}(t+dt)$$

— тензоры в разных точках пространства V^n и в разных базисах. При смене координат (x^i) эти базисы преобразуются по-разному и поэтому сравнение $T_{rs}^{ij}(t)$ и $T_{rs}^{ij}(t+dt)$ не имеет смысла.

Другое дело, если предварительно перенести параллельно тензор T из точки $t+dt$ в точку t вдоль рассматриваемой кривой.

Тогда оба тензора будут заданы в общей точке t и, значит, в одном и том же базисе. Это позволит сравнить эти тензоры покомпонентно. Вычитая из параллельно перенесенного в точку t тензора $T(t+dt)$ тензор $T(t)$ и рассматривая главную часть разности, получим абсолютный дифференциал $DT_{rs}^{ij}(t)$ тензора $T_{rs}^{ij}(t)$.

Проведем соответствующие рассуждения.

Пусть \tilde{T}_{rs}^{ij} — результат параллельного переноса тензора $T_{rs}^{ij}(t+dt)$ из точки $t+dt$ в точку t . Это означает, что и обратно: тензор $T_{rs}^{ij}(t+dt)$ получается из тензора $\tilde{T}_{rs}^{ij}(t)$ путем параллельного переноса последнего из точки t в точку $t+dt$.

Согласно формуле (22) для \tilde{T}_{rs}^{ij} тогда получим

$$T_{rs}^{ij}(t+dt) \approx \tilde{T}_{rs}^{ij} + d\tilde{T}_{rs}^{ij} = \tilde{T}_{rs}^{ij} + \{-\Gamma_{kp}^i \tilde{T}_{rs}^{pj} - \Gamma_{kp}^j \tilde{T}_{rs}^{ip} + \Gamma_{kr}^p \tilde{T}_{ps}^{ij} + \Gamma_{ks}^p \tilde{T}_{rp}^{ij}\} dx^k. \quad (24)$$

Для сокращения записи указание на то, что величины вычисляются в точке t , опущено.

Из приближенного равенства

$$T_{rs}^{ij}(t+dt) \approx T_{rs}^{ij} + dT_{rs}^{ij}$$

и соотношения (24), заменяя с принятой степенью точности \tilde{T}_{rs}^{ij} из выражения в фигурных скобках на $T_{rs}^{ij}(t)$, получаем, что

$$\tilde{T}_{rs}^{ij} \approx T_{rs}^{ij} + dT_{rs}^{ij} + \{\Gamma_{kp}^i T_{rs}^{pj} + \Gamma_{kp}^j T_{rs}^{ip} - \Gamma_{kr}^p T_{ps}^{ij} - \Gamma_{ks}^p T_{rp}^{ij}\} dx^k. \quad (25)$$

Определение. Абсолютным (ковариантным) дифференциалом DT_{rs}^{ij} называется главная линейная часть приращения $\tilde{T}_{rs}^{ij} - T_{rs}^{ij}$ тензора $T(t+dt)$, параллельно перенесенного в точку t , и тензора $T(t)$, взятого в этой точке.

Таким образом, согласно формуле (25),

$$DT_{rs}^{ij} = dT_{rs}^{ij} + \{\Gamma_{kp}^i T_{rs}^{pj} + \Gamma_{kp}^j T_{rs}^{ip} - \Gamma_{kr}^p T_{ps}^{ij} - \Gamma_{ks}^p T_{rp}^{ij}\} dx^k.$$

Для общего случая — тензора типа $\binom{p}{q}$ — имеет место аналогичная формула

$$DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = dT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \{\Gamma_{km}^{i_1} T_{i_1 \dots i_q}^{m i_2 \dots i_p} + \dots + \Gamma_{km}^{i_p} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_{p-1} m} - \Gamma_{k i_1}^m T_{m j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \Gamma_{k i_q}^m T_{i_1 \dots i_{q-1} m}^{i_1 \dots i_p}\} dx^k. \quad (26)$$

Формула (26) справедлива для тензорного поля T , заданного на произвольной кривой $x^i = x^i(t)$ риманова пространства V^n .

Допустим, что тензорное поле T типа $\binom{p}{q}$ задано во всем пространстве V^n и $T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$ — его компоненты в локальном базисе, определяемом координатной системой (x^i) .

В этом случае формула (26) работает на любой кривой $x^i = x^i(t)$, причем в этой формуле $dT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$ — дифференциал функции $T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$ от переменных x^1, \dots, x^n , а dx^k — дифференциалы переменных.

Учитывая, что

$$dT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} dx^k,$$

запишем формулу (26) по-иному:

$$DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = \nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} dx^k, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = & \frac{\partial}{\partial x^k} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \\ & + \Gamma_{km}^{i_1} T_{i_2 \dots i_q}^{m i_1 \dots i_p} + \dots + \Gamma_{km}^{i_p} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_{p-1} m} - \\ & - \Gamma_{k i_1}^m T_{m i_2 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \Gamma_{k i_q}^m T_{i_1 \dots i_{q-1} m}^{i_1 \dots i_p}. \end{aligned} \quad (28)$$

Выражение

$$\nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p},$$

определенное соотношениями (27) и (28), называется *абсолютной*, или *ковариантной*, производной тензора T по аргументу x^k .

В § 8 главы 3 было доказано, что ковариантная производная тензора типа $\binom{p}{q}$ представляет собой тензор типа $\binom{p}{q+1}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Абсолютный дифференциал $DT_{(j)}^{(i)}$ тензора $T_{(j)}^{(i)} = T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$ типа $\binom{p}{q}$ вновь является тензором типа $\binom{p}{q}$.

Доказательство вытекает из формулы (27), если заметить, что правая часть

$$\nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} dx^k$$

представляет собой свертку тензора

$$\nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}$$

типа $\binom{p}{q+1}$ и тензора dx^k типа $\binom{1}{0}$.

6°. Техника абсолютного дифференцирования

Покажем, что абсолютный дифференциал линейной комбинации тензоров и абсолютный дифференциал произведения тензоров вычисляются по правилам, известным из курса математического анализа:

1⁺.

$$D(\lambda T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) = \lambda DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu DS_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p},$$

где λ и μ — произвольные постоянные.

2⁺.

$$D(T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot S_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r}) = (DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) \cdot S_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r} + T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot (DS_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r}).$$

Привлекая формулу (27) и пользуясь свойствами операции ковариантного дифференцирования (2° § 9 главы 3), получаем:

$$\begin{aligned} 1. D(\lambda T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) &= \nabla_m (\lambda T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) dx^m = \\ &= (\lambda \nabla_m T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu \nabla_m S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) dx^m = \lambda DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu DS_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. D(T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot S_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r}) &= \nabla_m (T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot S_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r}) dx^m = \\ &= (\nabla_m T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) \cdot S_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r} dx^m + T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot \nabla_m S_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r} dx^m = \\ &= (DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) \cdot S_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r} + T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot (DS_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r}). \end{aligned}$$

Формула дифференцирования свернутого тензора

$$(DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) \Big|_{i_1=s}^{i_1=s} = D(T_{s i_2 \dots i_q}^{s i_1 \dots i_p})$$

доказывается аналогично:

$$(DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) \Big|_{i_1=s}^{i_1=s} = (\nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) \Big|_{i_1=s}^{i_1=s} dx^k = \nabla_k (T_{s i_2 \dots i_q}^{s i_1 \dots i_p}) dx^k = D(T_{s i_2 \dots i_q}^{s i_1 \dots i_p}).$$

7°. Еще раз о параллельном переносе тензоров

Мы подошли к понятию абсолютного дифференцирования тензоров геометрическим путем. В основу были положены привычные идеи введения понятий производной и дифференциала скалярного и векторного полей.

Можно поступить и несколько иначе, встав на формальный путь. Именно, можно ввести абсолютный дифференциал тензорного поля при помощи формулы (26), развить технику абсолютного дифференцирования, а затем определить параллельное пере-

несение тензора $T_{i_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ вдоль произвольной кривой посредством условия

$$DT_{i_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = 0.$$

Тем самым тензор, заданный в каждой точке некоторой кривой, параллельно переносится вдоль нее, если абсолютный дифференциал этого тензора в любой точке данной кривой равен нулю.

Такой формальный подход к понятию параллельного переноса, разумеется, равносильен нашему прежнему подходу. Он имеет ряд преимуществ, особенно при проведении выкладок. Например, легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Линейная комбинация и произведение параллельно переносимых тензоров переносятся параллельно.

* Пусть тензоры $T_{i_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ и $S_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r}$ переносятся параллельно вдоль заданной кривой, т. е. в каждой ее точке

$$DT_{i_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = 0, \quad DS_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r} = 0.$$

Тогда и их произведение

$$U_{i_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} = T_{i_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot S_{i_1 \dots i_t}^{k_1 \dots k_r}$$

переносится параллельно:

$$DU = D(TS) = DT \cdot S + T \cdot DS = 0. \quad *$$

8°. Параллельный перенос некоторых важных тензоров

А. Абсолютный дифференциал метрического тензора g_{rs} риманова пространства V^n равен нулю в любой точке этого пространства.

* Воспользуемся тем, что

$$\nabla_k g_{rs} = 0$$

(см. формулы (11) пункта 4 § 9 главы 3).

Из формулы (27) вытекает, что

$$Dg_{rs} = 0.$$

Таким образом, метрический тензор представляет собой в пространстве V^n поле параллельных тензоров. *

Б.
$$D\delta_j^i = 0,$$

где δ_j^i — символ Кронекера.

В силу формулы (27) достаточно вычислить ковариантную производную $\nabla_k \delta_j^i$. Имеем

$$\nabla_k \delta_j^i = \frac{\partial}{\partial x^k} \delta_j^i + \Gamma_{kp}^i \delta_j^p - \Gamma_{kj}^p \delta_p^i = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{ki}^j = 0.$$

В. Абсолютный дифференциал контравариантного метрического тензора g^{ij} равен нулю:

$$Dg^{ij} = 0.$$

Г. При параллельном перенесении векторов ξ^i и η^j вдоль данной кривой их скалярное произведение не изменяется.

Имеем

$$D(\langle \xi, \eta \rangle) = D(g_{ij} \xi^i \eta^j) = Dg_{ij} \xi^i \eta^j + g_{ij} D\xi^i \eta^j + g_{ij} \xi^i D\eta^j = 0.$$

Так как $g_{ij} \xi^i \eta^j$ — инвариант (тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) и потому образует скалярное поле, то его абсолютный дифференциал равен обычному дифференциалу.

Поэтому

$$d(g_{ij} \xi^i \eta^j) = 0,$$

т. е.

$$\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij} \xi^i \eta^j \equiv \text{const.}$$

§ 4. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1°. Геodesические как линии постоянного направления. Канонический параметр

Определение. Кривая L в римановом пространстве V^n называется *геodesической*, если любой вектор касательной к L в какой-либо ее точке при параллельном переносе вдоль L остается вектором касательной к L .

Пусть L — геodesическая линия в пространстве V^n , заданная параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

и $\xi^i(t_0)$ — вектор касательной к L в точке M_0 , определяемой значением t_0 параметра. Перенесем этот вектор параллельно вдоль геodesической L в точку M , определяемую значением t параметра. Получим в точке M вектор касательной $\xi^i(t)$. Так как $\frac{dx^i}{dt}$ — также вектор касательной к L и все векторы касательной к L в точке M коллинеарны, то

$$\frac{dx^i}{dt} = \alpha(t) \xi^i(t), \quad (1)$$

причем $\alpha(t) \neq 0$.

Поставим следующий вопрос: нельзя ли выбрать на геодезической L новый параметр $\tau = \tau(t)$ так, чтобы вектор касательной $\frac{dx^i}{d\tau}$ в каждой точке кривой L получался параллельным переносом вдоль L вектора $\frac{dx^i}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0}$?

Ответ положительный: такой параметр можно выбрать всегда. Покажем это.

Введем параметр τ посредством следующей формулы:

$$\tau = \int \alpha(t) dt,$$

т. е.

$$d\tau = \alpha(t) dt, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\alpha(t)}.$$

Тогда

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\alpha} \frac{dx^i}{dt}. \quad (2)$$

Воспользовавшись соотношением (1), получаем, что

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \xi^i(t).$$

Так как $\xi^i(t)$ — вектор касательной к геодезической L , полученный параллельным переносом вдоль L вектора $\xi^i(t_0)$, то полученное равенство означает следующее: при таком выборе параметра τ на геодезической L вектор касательной $\frac{dx^i}{d\tau}$ к L получается параллельным переносом вдоль L какого-то вектора касательной $\frac{dx^i}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0}$.

Определение. Параметр τ , для которого векторы касательных $\frac{dx^i}{d\tau}$ образуют вдоль геодезической поле параллельных векторов (вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ переносится параллельно вдоль геодезической), называется *каноническим параметром*.

Замечание. Если τ — канонический параметр, то $\tau^* = A\tau + B$ ($A \neq 0$ и B — постоянные) также является каноническим параметром. В самом деле,

$$\frac{dx^i}{d\tau^*} = \frac{dx^i}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\tau^*} = \frac{1}{A} \frac{dx^i}{d\tau}.$$

Это означает, что вектор $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ также переносится параллельно вдоль геодезической — он получается из параллельно переносимого вдоль геодезической вектора $\frac{dx^i}{d\tau}$ умножением на постоянную $\frac{1}{A}$.

Таким образом, если геодезическая существует, то на ней можно выбрать канонический параметр.

Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Из каждой точки M риманова пространства V^n по заданному в этой точке направлению исходит единственная геодезическая линия.

* Пусть

$$x^i = x^i(\tau)$$

— параметрические уравнения искомой геодезической линии, причем параметр τ является каноническим.

Это означает, что вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ переносится параллельно вдоль искомой геодезической, т. е. удовлетворяет соотношениям

$$d \frac{dx^k}{d\tau} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \quad (k=1, \dots, n) \quad (3)$$

(см. формулы (14) § 3).

Равенства (3) можно записать также в следующей, эквивалентной, форме:

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \quad (k=1, \dots, n). \quad (4)$$

Соотношения (4) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных в некоторой области пространства V^n .

Действительно, V^n рассматривается нами как область арифметического пространства A^n , в которой задана метрика $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. При помощи этой метрики в каждой точке области определяются функции Γ_{ij}^k , представляющие собой, таким образом, функции координат x^1, \dots, x^n .

Определение. Соотношения (4) называются (*дифференциальными*) *уравнениями геодезических*.

По условию теоремы нам заданы: точка M и направление в этой точке.

Пусть a^i — координаты точки M , а b^i — координаты вектора, определяющего направление в точке M :

$$x^i|_{\tau=\tau_0} = a^i, \quad \left. \frac{dx^i}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} = b^i. \quad (5)$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что система (4) при начальных данных (5) имеет в некоторой окрестности точки M единственное решение $x^i = x^i(\tau)$.

Тем самым в пространстве V^n определяется единственная кривая, исходящая из точки M по заданному в этой точке направлению (более точно, вектор касательной $\frac{dx^i}{d\tau}$ в точке M совпадает

с заданным вектором b^i). В каждой точке построенной кривой векторы касательной $\frac{dx^i}{d\tau}$ удовлетворяют соотношениям (3),

т. е. переносятся вдоль этой кривой параллельно.

Последнее означает, что кривая $x^i = x^i(\tau)$ геодезическая. *

Геометрический смысл канонического параметра.

Покажем, что длина дуги геодезической представляет собой канонический параметр.

В самом деле, если за параметр на геодезической принята длина дуги s , то длина вектора касательной $\frac{dx^i}{ds}$ будет равна единице: квадрат длины этого вектора равен

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds},$$

а так как $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, то

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1.$$

При параллельном переносе векторов сохраняется их скалярное произведение (8° § 3). В частности, сохраняется скалярный квадрат вектора и, значит, его длина.

Параллельно перенесем вдоль геодезической касательный вектор единичной длины. В результате, согласно определению геодезических и отмеченного выше свойства сохранения длин векторов при параллельном переносе, получим касательный к геодезической вектор единичной длины.

Таким образом, вектор $\frac{dx^i}{ds}$ параллельно переносится вдоль геодезической и, значит, длина дуги s — канонический параметр.

Нетрудно проверить, что если s — канонический параметр, то любой другой канонический параметр τ будет связан с s соотношением $\tau = As + B$, где $A \neq 0$ и B — постоянные.

Предъявленное линейное преобразование можно интерпретировать как изменение масштабной единицы и сдвига начала отсчета. Поэтому параметр τ можно рассматривать как длину дуги, измеряемую при помощи новой масштабной единицы.

2°. Геодезические как экстремали

*Уравнения Эйлера**.

Пусть кривая L соединяет в римановом пространстве V^n точки M_0 и M_1 и

$$x^i = x^i(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (6)$$

* Эйлер (Euler) Леонард (15.4.1707—18.9.1783) — швейцарский математик, член Петербургской АН (с 1726 по 1741 г. и с 1766 г.).

— ее параметрические уравнения, причем точке M_0 отвечает значение t параметра, равное t_0 , а точке M_1 — $t=t_1$.

Рассмотрим семейство кривых L_ε , зависящих от малого (числового) параметра ε и функций ω^i :

$$x_\varepsilon^i = x^i(t, \varepsilon) = x^i(t) + \varepsilon \omega^i \quad (t_0 \leq t \leq t_1); \quad (7)$$

функции $\omega^i = \omega^i(x^1, \dots, x^n)$ обращаются в нуль при $t=t_0$ и $t=t_1$:

$$\omega^i|_{t=t_0} = 0, \quad \omega^i|_{t=t_1} = 0. \quad (8)$$

Ясно, что кривые L_ε также соединяют точки M_0 и M_1 .

Обратимся к функционалу

$$J(\varepsilon) = J(x_\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) dt, \quad (9)$$

где $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$, рассматривая его на кривых (8).

Разлагая $J(\varepsilon)$ по формуле Тейлора с центром в точке $\varepsilon=0$, получим, что

$$J(\varepsilon) - J(0) = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \omega^i + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^i} \dot{\omega}^i \right] (t) dt + o(\varepsilon),$$

где

$$\dot{\omega}^i = \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} \dot{x}^j,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}(x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^i}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^i}(x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)).$$

Величина

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \omega^i + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^i} \dot{\omega}^i \right] (t) dt \quad (10)$$

называется *первой вариацией* функционала (9).

Интегрируя второе слагаемое в правой части формулы (10) и учитывая условия (8), получим, что

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] (t) \omega^i dt. \quad (11)$$

Говорят, что функционал (9) *стационарен* на кривой L , если его вариация δJ равна нулю для всех ω^i при достаточно малых ε .

Кривая L называется в этом случае *экстремалью* функционала (9).

УТВЕРЖДЕНИЕ. Кривая L является экстремалью функционала (9) в том и только в том случае, когда на L выполняются соотношения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (12)$$

Соотношения (12) называются *уравнениями Эйлера*.

ТЕОРЕМА 5. Экстремальными функционала

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \quad (13)$$

являются геодезические линии.

Другими словами, геодезические линии являются кривыми стационарной длины.

* Построим уравнения Эйлера для функционала (13).

Так как в рассматриваемом случае

$$\varphi(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = \sqrt{g_{ij}(x^1, \dots, x^n) \dot{x}^i \dot{x}^j},$$

то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \frac{1}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2\frac{ds}{dt}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^k} &= \frac{1}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}} (g_{ij}\delta_k^i \dot{x}^j + g_{ij}\dot{x}^i \delta_k^j) = \\ &= \frac{1}{2\frac{ds}{dt}} (g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} g_{kj}\dot{x}^j. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения для $\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^k}$ в левые части уравнений Эйлера (12) и производя необходимые преобразования, получим

$$\left(g_{ij}\ddot{x}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k - \frac{g_{ij}\dot{x}^j \frac{d^2 s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k \right) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = 0.$$

Пользуясь тем, что

$$\Gamma_{i,jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^k - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k \right) = \\
 &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^k,
 \end{aligned}$$

после умножения на $\frac{ds}{dt}$ получим

$$g_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{i,jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} - g_{ij} \frac{dx^j}{dt} \cdot \frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}} = 0. \quad (14)$$

Умножая соотношения (14) на g^{il} и суммируя по i , с учетом тождеств.

$$g_{ij} g^{il} = \delta_j^l, \quad \Gamma_{i,jk} g^{il} = \Gamma_{jk}^l$$

приходим к формуле

$$\frac{d^2 x^l}{dt^2} + \Gamma_{jk}^l \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} - \frac{dx^l}{dt} \frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}} = 0.$$

Если перейти от (произвольного) параметра t к длине дуги s (канонический параметр), то окончательно получим

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \Gamma_{jk}^l \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, экстремальями функционала (13) являются геодезические линии. Так как этот функционал — длина дуги, то геодезические представляют собой линии стационарной длины. *

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что любой достаточно малый отрезок геодезической является кратчайшей среди всех спрямляемых кривых, соединяющих его концы.

§ 5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1°. Римановы координаты

Возьмем в римановом пространстве V^n некоторую точку $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$. Выбрав ее за начальную, проведем по всем направлениям из этой точки геодезические. В качестве параметра на каждой исходящей из точки M_0 геодезической выберем длину дуги s , которую будем отсчитывать от точки M_0 .

Параметрические уравнения каждой такой геодезической,

$$x^i = x^i(s),$$

определяются как решение системы уравнений геодезических

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \quad (16)$$

при начальных условиях

$$x^i|_{s=0} = x_0^i, \quad \left. \frac{dx^i}{ds} \right|_{s=0} = \xi^i \quad (i=1, \dots, n) \quad (17)$$

(напомним, что длина вектора ξ^i равна 1).

Каждой точке M на геодезической, отвечающей начальным данным (17), ставится в соответствие n чисел

$$y^i = \xi^i s, \quad (18)$$

где s — длина дуги $\overline{M_0M}$ этой геодезической.

Определение. Числа y^i , определяемые формулами (18), называются *римановыми координатами* точки M ; точке M_0 отвечают нулевые римановы координаты: $y_0^i = 0$.

Отметим, что римановы координаты y^i — это координаты вектора M_0M' в касательном пространстве E^n в точке M_0 пространства V^n . При этом указанный вектор имеет длину, равную s , а его направление в пространстве E^n определяется единичным вектором с координатами ξ^i , которому он и коллинеарен.

Докажем, что в римановом пространстве V^n вблизи точки M_0 введенные нами величины y^i действительно можно рассматривать как координаты точек.

Для этого нужно показать, что каждому упорядоченному набору достаточно малых чисел y^1, \dots, y^n отвечает только одна точка M из некоторой окрестности точки M_0 пространства V^n .

Итак, пусть набор чисел y^i задан. Рассмотрим в касательном пространстве E^n в точке M_0 точку M' с координатами y^i (см. 1° и 2° § 2) и вычислим по обычным формулам евклидовой геометрии длину s вектора M_0M' . Затем, пользуясь формулами (18), найдем координаты ξ^i единичного вектора, коллинеарного вектору M_0M' .

По этим данным строим начальные условия (17) и из уравнений (16) определяем геодезическую, проходящую через точку M_0 , и точку M на ней так, что длина дуги $\overline{M_0M}$ равна s .

Точка M имеет координаты x^1, \dots, x^n . Таким образом, из наших рассуждений вытекает, что

$$x^i = x^i(y^1, \dots, y^n) \quad (i=1, \dots, n). \quad (19)$$

Из известных теорем теории дифференциальных уравнений следует, что функции (19) как решения системы (16) будут непрерывны вместе с первыми производными.

Остается убедиться в том, что из соотношений (19) можно найти y^i как функции от x^h , т. е. разрешить уравнения (19) от-

носителем y^i . Для этого достаточно доказать, что в некоторой окрестности точки M_0

$$\det J_{y \rightarrow x} = \frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(y^1, \dots, y^n)} \neq 0. \quad (20)$$

Вычислим $\frac{dx^i}{ds}$. С учетом формул (18), (19) имеем

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{dy^j}{ds} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \xi^j. \quad (21)$$

Согласно условиям (17) в точке M_0 ($s=0$)

$$\left. \frac{dx^i}{ds} \right|_{s=0} = \xi^i.$$

Отсюда и из соотношений (21) получаем, что в точке M_0 выполняются равенства

$$\xi^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) \Big|_{s=0} \xi^j.$$

Так как последнее соотношение справедливо для любого вектора ξ^i , то

$$\left. \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|_{s=0} = \delta_j^i.$$

Поэтому

$$\left. \frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(y^1, \dots, y^n)} \right|_{M_0} = \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) \Big|_{s=0} = 1 \neq 0.$$

Отсюда и из непрерывности функций $\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$ вытекает, что равенство (20) выполняется в некоторой окрестности точки M_0 .

Итак, мы доказали, что в некоторой окрестности произвольной точки риманова пространства V^n можно ввести римановы координаты.

Свойства римановых координат.

1+. Пусть точка M_0 — начало системы римановых координат (y^i) . Тогда уравнения геодезической, исходящей из точки M_0 и имеющей направляющий вектор ξ^i , имеют вид

$$y^i = \xi^i s. \quad (22)$$

Равенства (22) достаточны для того, чтобы y^i были римановыми координатами с началом в точке M_0 .

В самом деле, из условий (22) вытекает, что $\xi^i = \frac{dy^i}{ds}$ — начальный касательный вектор (в точке M_0), и поэтому римановы координаты, построенные по способу, описанному выше, совпадут с y^i .

2+. Функции $y^i = \xi^i s$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям геодезических

$$\frac{d^2 y^k}{ds^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dy^i}{ds} \frac{dy^j}{ds}.$$

Отсюда и из равенств

$$\frac{dy^i}{ds} = \xi^i, \quad \frac{d^2 y^i}{ds^2} = 0$$

получаем, что

$$\Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j = 0.$$

Умножая эти соотношения на s^2 и используя формулы (22), убеждаемся в том, что

$$\Gamma_{ij}^k y^i y^j = 0. \quad (23)$$

Равенства (23) выполняются в каждой точке и представляют собой достаточные условия того, чтобы y^i были римановыми координатами.

З а м е ч а н и е. Если в точке M_0 метрический тензор

$$g_{ij}|_{M_0} = \delta_{ij},$$

то римановы координаты называются *нормальными координатами*.

3+. **Вид линейного элемента в римановых координатах.** Ограничимся случаем, когда римановы координаты являются локально нормальными (см. пункт 3° § 2). Обозначим их через (x^1, \dots, x^n) . Тогда, как доказано выше, разложение компонент метрического тензора $g_{kq}(x^1, \dots, x^n)$ по формуле Тейлора с центром в точке $M_0(0, \dots, 0)$ будет иметь следующий вид:

$$g_{kq}(x^1, \dots, x^n) = \delta_{kq} - \frac{1}{3} R_{mklq}^0 x^m x^l + o(\rho^2)$$

(здесь R_{mklq}^0 — компоненты тензора Римана—Кристоффеля в точке M_0 , $\rho = \sqrt{x^{1^2} + \dots + x^{n^2}}$, третье слагаемое $o(\rho^2)$ — компоненты тензора типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, порядок малости которых относительно ρ выше второго).

Таким образом, линейный элемент в римановых координатах, нормальных в данной точке M_0 , можно записать так:

$$ds^2 = \left\{ \delta_{kq} - \frac{1}{3} R_{mklq}^0 x^m x^l + o(\rho^2) \right\} dx^k dx^q.$$

Полученная формула удобна в различных приложениях.

2°. Полугеодезические координаты

Рассмотрим в римановом пространстве V^n гиперповерхность V^{n-1} , определяемую параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1}) \quad (i=1, \dots, n). \quad (24)$$

Потребуем, чтобы ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix} \quad (25)$$

был равен $n-1$ (это требование гарантирует независимость функций (24)).

Построим в каждой точке гиперповерхности V^{n-1} касательные пространства E^n к объемлющему пространству V^n .

Пусть $M = M(u^1, \dots, u^{n-1})$ — точка гиперповерхности V^{n-1} . Введем на гиперповерхности V^{n-1} координатные линии.

Если u^1 изменяется, а u^2, \dots, u^{n-1} фиксированы, то соотношения (24) определяют на гиперповерхности V^{n-1} кривую — (координатную) линию u^1 ; касательный вектор к u^1 -линии расположен в касательном пространстве E^n и имеет координаты $\frac{\partial x^1}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u^1}$.

Аналогично вводятся координатная линия u^2, \dots , координатная линия u^{n-1} и касательные векторы к ним.

Обратимся к матрице (25). Ее строки — координаты построенных касательных векторов к линиям u^i . Из того, что ранг матрицы (25) равен числу этих векторов, вытекает, что построенные векторы линейно независимы (рис. 4).

Линейную оболочку E^{n-1} этих векторов можно рассматривать как касательное пространство к гиперповерхности V^{n-1} .

В касательном пространстве E^n построим нормаль η^i к пространству E^{n-1} в точке M_0 . В направлении η^i проведем из точки M в римановом пространстве V^n геодезическую — *геодезическую, ортогональную к гиперповерхности V^{n-1}* .

Прделаем подобное построение в каждой точке гиперповерхности.

Рассмотрим точку M^* риманова пространства V^n , расположенную вблизи гиперповерхности V^{n-1} . Через эту точку проходит и притом ровно одна геодезическая, ортогональная V^{n-1} . Предположим для определенности, что это геодезическая, исходящая из точки M .

Обозначим через s длину дуги $\overline{MM^*}$ этой геодезической. Тогда набор (u^1, \dots, u^{n-1}, s) , где u^1, \dots, u^{n-1} — координаты точки M , можно рассматривать как координаты точки M^* в пространстве V^n .

Докажем это.

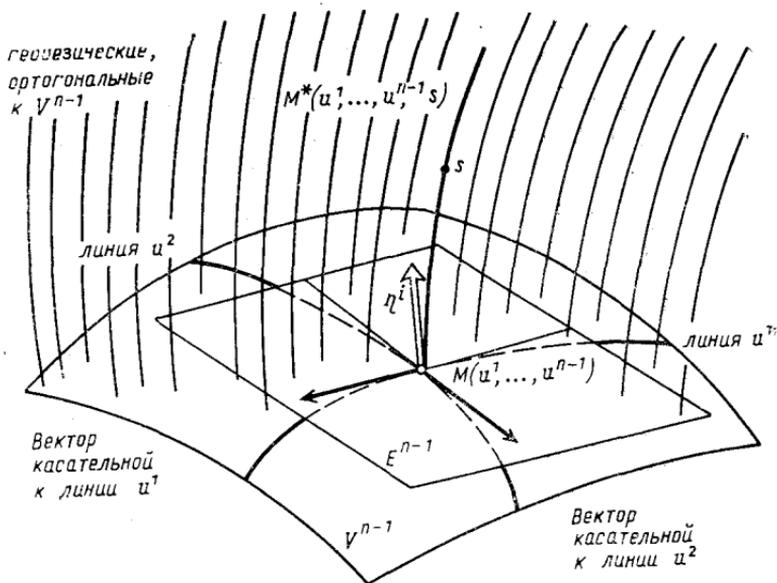


Рис. 4. Полугеодезическая координатная система

Из наших рассуждений следует, что каждому набору чисел u^1, \dots, u^{n-1}, s отвечает точка M^* риманова пространства V^n и, значит, ее координаты x^1, \dots, x^n будут функциями u^1, \dots, u^{n-1}, s :

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1}, s) \quad (i=1, \dots, n), \quad (26)$$

причем при $s=0$ эти функции совпадают с функциями (24).

Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial s} \end{vmatrix}. \quad (27)$$

При $s=0$ его строки представляют собой координаты векторов, касательных к линиям u^1, \dots, u^{n-1} гиперповерхности V^{n-1} (первые $n-1$ строк), и вектора η^i , ортогонального подпространству E^{n-1} (последняя строка). Эти n векторов линейно независимы. Поэтому определитель (27) при $s=0$ отличен от нуля.

В силу непрерывности частных производных функций (26) этот определитель будет отличен от нуля в некоторой области пространства V^n , содержащей гиперповерхность V^{n-1} .

Следовательно, в этой области (u^1, \dots, u^{n-1}, s) являются координатами в римановом пространстве V^n .

Построенные координаты называются *полугеодезическими координатами с базой* V^{n-1} .

Свойства полугеодезических координат.

1+. Вид линейного элемента в полугеодезических координатах.

Будем обозначать полугеодезические координаты u^1, \dots, u^{n-1}, s с базой $V^{n-1} \subset V^n$ следующим образом: x^1, \dots, x^{n-1}, x^n . Подчеркнем еще раз, что координатные линии x^n — геодезические, параметр x^n вдоль которых — длина дуги. Эти геодезические пересекают координатные гиперповерхности $x^n = \text{const}$ под прямым углом.

Пусть M — произвольная точка в окрестности базы V^{n-1} . Обозначим через

$$dx = (dx^1, \dots, dx^{n-1}, dx^n)$$

вектор смещения из точки M вдоль координатной линии x^n . Ясно, что

$$dx^1 = \dots = dx^{n-1} = 0, dx^n \neq 0. \quad (28)$$

Вектор смещения

$$\delta x = (\delta x^1, \dots, \delta x^{n-1}, \delta x^n)$$

из точки M по гиперповерхности $x^n = \text{const}$ обладает следующим свойством:

$$\delta x^n = 0. \quad (29)$$

Так как координатные линии x^n ортогональны гиперповерхностям $x^n = \text{const}$, то скалярное произведение векторов dx и δx должно быть равно нулю:

$$g_{ij} dx^i \delta x^j = 0.$$

Отсюда согласно формулам (28), (29) получаем

$$g_{n1} \delta x^1 dx^n + \dots + g_{n,n-1} \delta x^{n-1} dx^n = 0.$$

Вследствие того, что $dx^n \neq 0$, а $\delta x^1, \dots, \delta x^{n-1}$ произвольны, приходим к равенствам

$$g_{n1} = 0, \dots, g_{n,n-1} = 0.$$

Запишем теперь общее выражение линейного элемента $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ для смещения вдоль координатной линии $x^n = s$. Так как в этом случае $dx^1 = \dots = dx^{n-1} = 0$ и $dx^n = ds$, то

$$ds^2 = g_{nn} dx^n^2 = g_{nn} ds^2.$$

Тем самым

$$g_{nn} = 1.$$

Таким образом, линейный элемент ds^2 в полугеодезической системе координат x^1, \dots, x^{n-1}, x^n с базой V^{n-1} имеет следующий вид:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + dx^n{}^2 \quad (i, j=1, \dots, n-1).$$

2+. **Эквидистантные гиперповерхности.** Пусть V^{n-1} — гиперповерхность в римановом пространстве V^n . Проведем через произвольную точку M гиперповерхности V^{n-1} ортогональную ей геодезическую и отложим на этой геодезической от точки M отрезок длины a . Поступим так с каждой геодезической, ортогональной гиперповерхности V^{n-1} , и рассмотрим множество концов построенных отрезков. Это множество является гиперповерхностью $\overset{*}{V}^{n-1}$ пространства V^n . Гиперповерхность $\overset{*}{V}^{n-1}$ называется *эквидистантной* по отношению к заданной гиперповерхности V^{n-1} .

З а м е ч а н и е. Так как от каждой точки гиперповерхности на ортогональной ей геодезической можно отложить два отрезка одной и той же длины, то в результате предложенного построения получится два множества, разделенных гиперповерхностью V^{n-1} . Каждое из них будет гиперповерхностью, эквидистантной по отношению к V^{n-1} .

Справедливо следующее свойство эквидистантной гиперповерхности $\overset{*}{V}^{n-1}$. Любая геодезическая, ортогональная гиперповерхности V^{n-1} , будет ортогональна и эквидистантной ей гиперповерхности $\overset{*}{V}^{n-1}$.

Фактически это свойство было установлено еще в самом начале этого пункта, когда речь шла о построении полугеодезических координат. Построенные там координатные гиперповерхности $x^n = \text{const}$, эквидистантные по отношению к базе V^{n-1} , пересекают геодезические, ортогональные гиперповерхности V^{n-1} , под прямым углом.

Укажем одно свойство эквидистантных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве E^3 .

Пусть V^2 — замкнутая выпуклая регулярная поверхность. Отложим на нормалях к поверхности V^2 (это геодезические в пространстве E^3 , ортогональные поверхности V^2) во внешнюю сторону отрезки постоянной длины a . Концы этих отрезков образуют эквидистантную поверхность $\overset{*}{V}^2$ по отношению к заданной V^2 . Площади S и $\overset{*}{S}$ поверхностей V^2 и $\overset{*}{V}^2$ связаны соотношением

$$\overset{*}{S} = S + 4\pi a^2.$$

Доказательство предоставляется читателю.

Это равенство обобщается на многомерный случай.

СВОДКА ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ, ФОРМУЛ, ФАКТОВ

А. Поле симметричного тензора $g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$, заданное на открытом множестве $\{M\}$ пространства \mathbb{R}^n , определяет

на нем риманову метрику $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, если эта дифференциальная форма положительно определена.

Множество $\{M\}$ точек из пространства R^n , в котором введена риманова метрика, называется n -мерным римановым пространством.

Б. n -мерное евклидово пространство с линейным элементом $ds_0^2 = g_{ij}(x_0^1, \dots, x_0^n) dx^i dx^j$ называется касательным евклидовым пространством в точке $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$ n -мерного риманова пространства с линейным элементом $ds^2 = g_{ij}(x^1, \dots, x^n) dx^i dx^j$.

В. Координаты (x^1, \dots, x^n) в римановом пространстве называются нормальными в точке $M_0(0, \dots, 0)$, если

$$g_{ij}|_{M_0} = g_{ij}(0, \dots, 0) = \delta_{ij}, \quad \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_{M_0} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0, \dots, 0) = 0.$$

Г. Каноническое разложение метрического тензора: в любом n -мерном римановом пространстве для всякой его точки M_0 существует координатная система (x^1, \dots, x^n) , нормальная в точке M_0 и такая, что разложение компонент $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ метрического тензора этого пространства по формуле Тейлора с центром в точке $M_0(0, \dots, 0)$ имеет вид

$$g_{kq}(x^1, \dots, x^n) = \delta_{kq} - \frac{1}{3} R_{mklq}(0, \dots, 0) x^m x^l + o(x^{1^2} + \dots + x^{n^2}).$$

Д. Уравнение параллельного переноса вектора $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$:

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j.$$

Е. Абсолютный дифференциал тензора типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$:

$$DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} = dT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} dx^k,$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_k T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} &= \frac{\partial}{\partial x^k} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \Gamma_{km}^{i_1} T_{i_1 \dots i_q}^{m i_2 \dots i_p} + \dots \\ &\dots + \Gamma_{km}^{i_p} T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_{p-1} m} - \Gamma_{k j_1}^m T_{m j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \Gamma_{k j_q}^m T_{i_1 \dots i_{q-1} m}^{i_1 \dots i_p} \end{aligned}$$

— абсолютная производная тензора.

Ж.

$$D(\lambda T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu S_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) = \lambda DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu DS_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p},$$

где λ и μ — произвольные постоянные.

$$D(T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot S_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_r}) = (DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}) \cdot S_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_r} + T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot (DS_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_r}).$$

$$(DT_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p})|_{j_m^l = s} = D(T_{i_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p}|_{j_m^l = s}) \quad (1 \leq l \leq p, 1 \leq m \leq q).$$

3. Говорят, что тензор $T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}$ параллельно переносится вдоль кривой L , если вдоль этой кривой имеет место равенство

$$DT_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = 0.$$

Линейная комбинация и произведение параллельно переносимых тензоров переносятся параллельно.

$$Dg_{ij} = 0, D\delta_i^j = 0, Dg^{ij} = 0.$$

При параллельном перенесении векторов ξ и η вдоль кривой их скалярное произведение $\langle \xi, \eta \rangle$ не изменяется.

И. Кривая L в римановом пространстве называется *геодезической*, если вектор касательной к L в какой-либо ее точке при параллельном переносе вдоль L остается вектором касательной.

К. Параметр τ , для которого векторы касательной $\frac{dx^i}{d\tau}$ образуют вдоль геодезической поле параллельных векторов (вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ переносится параллельно вдоль геодезической), называется *каноническим параметром*.

На любой геодезической в качестве параметра можно выбрать канонический.

Из любой точки риманова пространства по заданному направлению в этой точке исходит единственная геодезическая.

Дифференциальные уравнения геодезических:

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0,$$

τ — канонический параметр, в частности длина дуги геодезической.

Экстремалими функционала

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

являются геодезические линии.

Любой достаточно малый отрезок геодезической является кратчайшей среди всех спрямляемых кривых, соединяющих его концы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить площадь круга радиуса r на: а) евклидовой плоскости; б) сфере радиуса $R > \pi r$; в) плоскости Лобачевского.

Ответ: а) πr^2 ; б) $2\pi R^2 \left(1 - \cos \frac{r}{R}\right)$; в) $2\pi (\operatorname{ch} r - 1)$.

2. Вычислить общее число независимых компонент тензора Римана—Кристоффеля при: а) $n=2$; б) $n=3$; в) $n=k$. Ответ: а) 1; б) 6; в) $k^2(k^2-1)/12$.

3. Вычислить компоненты тензора Римана—Кристоффеля для плоскости Лобачевского.

$$\text{Ответ: } R_{1212} = -R_{2112} = R_{2121} = -R_{1221} = -\frac{1}{2} \det(g_{ij})$$

(g_{ij} — компоненты метрического тензора плоскости Лобачевского), остальные компоненты тензора Римана—Кристоффеля равны нулю.

4. Описать геодезические линии следующих римановых пространств: а) евклидовой плоскости; б) двумерного тора; в) двумерной сферы; г) плоскости Лобачевского.

В курсе математического анализа вводятся и систематически изучаются такие важнейшие операции над функциями одной и нескольких переменных, как дифференцирование и интегрирование. Их свойства хорошо известны. В приложениях часто приходится рассматривать функции, заданные на множествах более сложной природы, чем прямая, плоскость или n -мерное координатное пространство \mathbb{R}^n . В этих случаях знакомый аппарат дифференциального и интегрального исчисления напрямую уже, как правило, не работает. Однако идеи, лежащие в его основании, допускают обобщение и развитие, столь необходимые в подобных ситуациях. Возникает то, что иногда принято называть анализом на многообразиях. При этом, конечно, отталкиваются от известных фактов математического анализа.

Чтобы как-то пояснить возникающие проблемы, обратимся к простому примеру.

Пусть на сфере задана некоторая функция. Специально подчеркнем, что функция задается в точках сферы и ни в одной точке, на этой сфере не лежащей, она не определена. Уже здесь, на этом примере, можно увидеть и трудности, которые возникают при попытках непосредственного перенесения основных операций математического анализа, и пути их преодоления.

Если функция задается на плоскости, то для изучения ее свойств естественно ввести на всей плоскости прямоугольную декартову систему координат и далее работать с этой функцией как с функцией двух переменных известными методами. На сфере подобной единой координатной системы просто нет. Правда, можно ввести координатную систему локально, в окрестности каждой точки. Однако введение локальных координат — операция неоднозначная, даже в одной окрестности их можно вводить многими способами. Соответственно каждый раз будут возникать новые функции, и в какой мере свойства этих функций будут связаны между собой, далеко не ясно.

Нельзя не сказать и о другом подходе. В ряде случаев удается продолжить заданную функцию на большее множество. Естественно, это продолжение зависит и от исходного множества и от заданной функции.

Например, для сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

такowym множеством может служить содержащий ее шаровой слой

$$1 - \varepsilon < x^2 + y^2 + z^2 < 1 + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало.

На этом большем множестве у новой функции можно найти необходимые производные, а затем рассматривать их значения только в точках сферы.

Но при таком подходе возникает естественный вопрос: насколько полученные результаты будут зависеть от способа продолжения функции на большее множество?

Еще один вопрос: можно ли заданную функцию проинтегрировать по сфере, и если можно, то как это сделать? Разумеется, ответ на него нужно искать на путях сведения этой задачи к обычному кратному интегрированию. Но и здесь нужно разобраться с локальными координатами.

Пытаясь найти удовлетворительные ответы на поставленные вопросы, мы поступим следующим образом. Сначала введем и изучим класс тех множеств (более сложных, чем координатное пространство \mathbb{R}^n), на которых будут проводиться основные рассуждения (гладкие многообразия). Затем перейдем к описанию класса функций на этих множествах, для которых будет строиться новый аппарат (гладкие функции и гладкие отображения). Далее попробуем ввести операции дифференцирования и интегрирования. Естественно, следует стремиться к тому, чтобы в рассматриваемый класс множеств вошло и пространство \mathbb{R}^n , а развиваемые понятия и операции приводили в этом случае к известным результатам, пусть даже и в несколько непривычной форме.

Конечно, абсолютно все сохранить не удастся: у пространства \mathbb{R}^n , как и у любого другого множества, есть свои, только ему присущие свойства. Поступаясь деталями, мы будем стараться сохранить главное. Следует, однако, иметь в виду, что одно и то же хорошо известное понятие может допускать различные обобщения (разумеется, связанные между собой). Все зависит от того, от каких сторон рассматриваемого явления мы будем отталкиваться и в каком направлении вести эти обобщения.

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ТОПОЛОГИИ

Мы начнем изложение с короткого рассказа о некоторых основных топологических понятиях, ограничиваясь описанием только тех фактов, которые будут использоваться в дальнейшем, и опуская доказательства.

1°. Топология координатного пространства

Введем в n -мерном координатном пространстве \mathbb{R}^n важный класс подмножеств — открытые множества — и изучим некоторые их свойства.

Начнем с определений.

Напомним, что *расстояние* между точками $p=(p^1, \dots, p^n)$ и $q=(q^1, \dots, q^n)$ пространства \mathbf{R}^n определяется формулой

$$|p-q| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p^i - q^i)^2}.$$

Пусть $r > 0$ — некоторое число.

Множество

$$B^n(p, r) = \{q \in \mathbf{R}^n \mid |q-p| < r\}$$

называется *n*-мерным *открытым шаром* радиуса r с центром в точке p .

Подмножество \mathcal{O} координатного пространства \mathbf{R}^n называется *открытым множеством*, если для каждой точки p из \mathcal{O} можно указать открытый шар с центром в этой точке, целиком лежащий в \mathcal{O} .

Простейшим примером открытого множества является само координатное пространство (рис. 1).

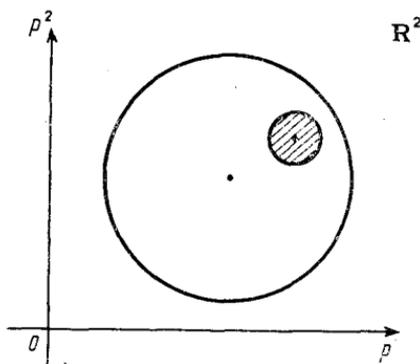


Рис. 1. Открытый круг — открытое множество на плоскости

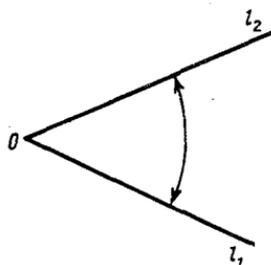


Рис. 2. Открытый угол с вершиной O

Пустое множество \emptyset будем считать открытым по определению.

Класс открытых множеств обладает следующими легко проверяемыми свойствами: его элементами являются

- 1+. Все пространство.
- 2+. Пустое множество.
- 3+. Пересечение двух открытых множеств.
- 4+. Объединение любого числа открытых множеств.

2°. Топологическое пространство

Обратимся теперь к общему случаю.

Пусть \mathcal{X} — произвольное множество. Его элементы будем называть *точками*.

Обозначим через

$$\mathcal{T} = \{U_\alpha\}$$

семейство его подмножеств U_α , подчиненное следующим условиям: семейству \mathcal{T} принадлежат

1. Само множество \mathcal{X} .
2. Пустое множество \emptyset .
3. Пересечение двух множеств из семейства \mathcal{T} .
4. Объединение любого числа множеств из семейства \mathcal{T} .

Семейство подмножеств с указанными свойствами всегда существует, и как правило, не одно.

Определение. Семейство \mathcal{T} подмножеств множества \mathcal{X} , удовлетворяющее условиям 1—4, называется *топологией* на множестве \mathcal{X} .

Множество \mathcal{X} вместе с семейством \mathcal{T} называется *топологическим пространством* и обозначается через $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, часто просто через \mathcal{X} .

Пример 1. Открытые множества из пункта 1° задают топологию в пространстве \mathbf{R}^n ; она называется *естественной*.

Множества U_α из семейства \mathcal{T} называют *открытыми множествами* (по аналогии с рассмотренным выше случаем $\mathcal{X} = \mathbf{R}^n$).

Пример 2. Введем на плоскости \mathbf{R}^2 топологию, отличную от естественной.

Пусть O — фиксированная точка \mathbf{R}^2 и l_1, l_2 — лучи, исходящие из точки O . Часть плоскости, лежащую между лучами l_1 и l_2 , исключая точки на самих лучах, будем называть *открытым углом* с вершиной O (рис. 2).

Открытым назовем всякое множество, которое можно представить в виде объединения открытых углов с вершиной O .

Нетрудно проверить, что тем самым на плоскости \mathbf{R}^2 вводится топология; она называется *конической*. *

Другой важный класс множеств образуют замкнутые множества.

Определение. Подмножество F топологического пространства \mathcal{X} называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathcal{X} \setminus F$ открыто.

Пример 3. Множество

$$\mathbf{R}_+^n = \{(p^1, \dots, p^n) \in \mathbf{R}^n \mid p^n \geq 0\}$$

является замкнутым подмножеством пространства \mathbf{R}^n : его дополнение

$$\{(p^1, \dots, p^n) \in \mathbf{R}^n \mid p^n < 0\}$$

открыто.

Свойства замкнутых множеств.

1+. Пустое множество \emptyset замкнуто.

2+. Само множество \mathcal{X} замкнуто.

3+. Объединение двух замкнутых множеств замкнуто.

4+. Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

Пусть \mathcal{U} — произвольное подмножество топологического пространства \mathcal{X} .

Рассмотрим всевозможные содержащиеся в нем открытые множества. Их объединение (оно является открытым множеством) называется *внутренностью* множества \mathcal{U} .

Обозначение: $\text{int } \mathcal{U}$.

Пересечение всевозможных замкнутых множеств, содержащих \mathcal{U} (оно также является замкнутым), называется *замыканием* множества \mathcal{U} .

Обозначения: $\text{cl } \mathcal{U}$, $\bar{\mathcal{U}}$.

Множество

$$\partial \mathcal{U} = \text{cl } \mathcal{U} \setminus \text{int } \mathcal{U}$$

называется *границей* множества \mathcal{U} .

Пример 4. Рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 множество

$$\mathcal{U} = \{(p^1, p^2) | 0 < p^1 \leq 1, 0 < p^2 \leq 1\}.$$

Тогда

$$\text{int } \mathcal{U} = \{(p^1, p^2) | 0 < p^1 < 1, 0 < p^2 < 1\}$$

— открытый квадрат,

$$\text{cl } \mathcal{U} = \{(p^1, p^2) | 0 \leq p^1 \leq 1, 0 \leq p^2 \leq 1\}$$

— замкнутый квадрат, границу $\partial \mathcal{U}$ образуют стороны квадрата $OABC$ (рис. 3). *

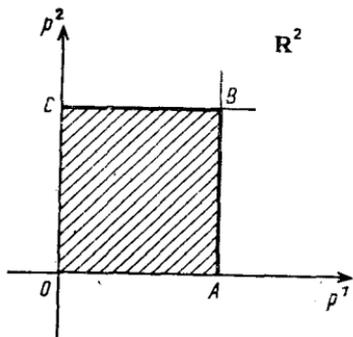


Рис. 3. Множество \mathcal{U} ни открыто ни замкнуто

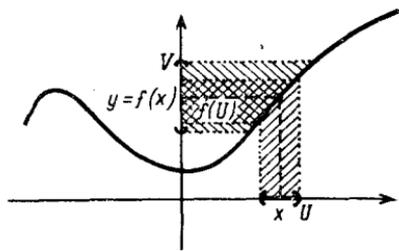


Рис. 4. Определение непрерывности функции $y = f(x)$

Пусть x — произвольная точка топологического пространства \mathcal{X} .

Определение. *Окрестностью* точки x называется всякое открытое множество, содержащее эту точку.

Открытое множество является окрестностью каждой своей точки.

3°. Топологическое подпространство

Пусть \mathcal{X} — топологическое пространство и \mathcal{Y} — непустое подмножество \mathcal{X} .

Топология пространства \mathcal{X} определяет некоторую топологию на множестве \mathcal{Y} .

Определение. Топологией на множестве \mathcal{Y} , индуцированной топологией пространства \mathcal{X} , называется совокупность множеств вида $U \cap \mathcal{Y}$, где U — открытое множество в пространстве \mathcal{X} .

Подмножество $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, снабженное так построенной (индуцированной) топологией, называется *топологическим подпространством* топологического пространства \mathcal{X} .

Пример. Рассмотрим в координатном пространстве \mathbf{R}^n подмножество

$$S^{n-1}(p, r) = \{q \in \mathbf{R}^n \mid |p - q| = r\}$$

— $(n-1)$ -мерную сферу радиуса r с центром в точке p . Сфера $S^{n-1}(p, r)$ является топологическим подпространством пространства \mathbf{R}^n ; топология на ней индуцируется естественной топологией координатного пространства \mathbf{R}^n .

4°. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм

Непрерывное отображение является естественным обобщением непрерывной функции.

Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — топологические пространства и f — отображение пространства \mathcal{X} в пространство \mathcal{Y} :

$$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}.$$

Определение. Отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ называется *непрерывным в точке x* из \mathcal{X} , если для любой окрестности V точки $f(x)$ в пространстве \mathcal{Y} найдется окрестность U точки x , такая, что $f(U) \subset V$.

Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке пространства \mathcal{X} .

Пример. Пусть $\mathcal{X} = \mathbf{R}^1$, $\mathcal{Y} = \mathbf{R}^1$ (прямая \mathbf{R}^1 наделена естественной топологией).

Обычное определение непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x :

для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всякого t , подчиненного условию

$$x - \delta < t < x + \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$$

— равносильно данному определению (рис. 4). *

Простейшим примером непрерывного отображения топологического пространства \mathcal{X} на себя является тождественное отображение:

$$1_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad 1_{\mathcal{X}}(x) = x.$$

Свойства непрерывных отображений.

1+. Отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывно тогда и только тогда когда прообраз любого множества, открытого в \mathcal{Y} , открыт в \mathcal{X} .

2+. Отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого множества, замкнутого в \mathcal{Y} , замкнут в \mathcal{X} .

3+. Композиция $g \circ f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ непрерывных отображений $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ и $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ является непрерывным отображением:

$$g \circ f: x \mapsto g(f(x)).$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} & & \mathbb{M} \\ \mathcal{X} & & \mathcal{Z} \end{array}$$

Особое значение имеют непрерывные отображения, у которых существуют и непрерывны обратные отображения.

Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — топологические пространства и отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ обратимо, т. е. существует отображение

$$f^{-1}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X},$$

такое, что

$$f^{-1} \circ f = 1_{\mathcal{X}}, \quad f \circ f^{-1} = 1_{\mathcal{Y}}.$$

Определение. Будем говорить, что топологическое пространство \mathcal{X} гомеоморфно топологическому пространству \mathcal{Y} , если оба отображения

$$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad f^{-1}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$$

непрерывны.

Обозначение: $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$ (читается: \mathcal{X} гомеоморфно \mathcal{Y}).

В этом случае отображения f и f^{-1} называются *гомеоморфными отображениями*, или *гомеоморфизмами* (рис. 5).

Пример. Координатное пространство \mathbb{R}^n гомеоморфно открытому шару $B^n = B^n(0, 1)$.

Соответствующие гомеоморфизмы задаются так: отображение

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow B^n$$

формулой

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

или, подробнее,

$$f(x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{x^1}{1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n |x^i|^2}}, \dots, \frac{x^n}{1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n |x^i|^2}} \right);$$

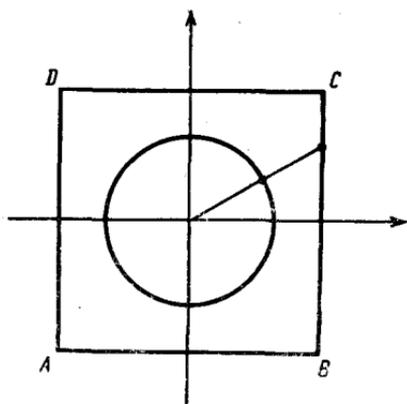


Рис. 5. Квадрат $ABCD$ гомеоморфен окружности

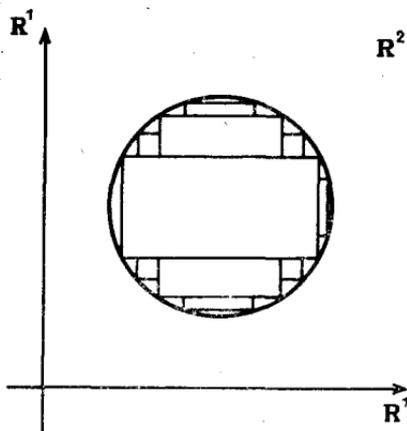


Рис. 6. Открытый круг на плоскости \mathbb{R}^2 можно представить в виде объединения бесконечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, — произведений интервалов (открытых множеств из $\mathcal{X} = \mathbb{R}^1$ и из $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^1$)

отображение

$$f^{-1} : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

формулой

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|},$$

или, подробнее,

$$f^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n |y^i|^2}}, \dots, \frac{y^n}{1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n |y^i|^2}} \right). *$$

5°. Топологическое произведение

Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — топологические пространства. Декартово произведение $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ определяется как совокупность всевозможных пар (x, y) , где $x \in \mathcal{X}$ и $y \in \mathcal{Y}$.

Введем во множестве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ топологию, связав ее с топологиями в \mathcal{X} и в \mathcal{Y} . Это семейство $\mathcal{T}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$, элементами которого являются объединения декартовых произведений открытых множеств из пространств \mathcal{X} и \mathcal{Y} . Типичным представителем семейства $\mathcal{T}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ является множество вида

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times V_\alpha,$$

где множества U_α открыты в \mathcal{X} , а множества V_α открыты в \mathcal{Y} для любого α из множества индексов A .

Определение. Декартово произведение $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, наделенное описанной выше топологией, называется *топологическим произведением* пространства \mathcal{X} на пространство \mathcal{Y} .

Пример 1. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^1$ (\mathbb{R}^1 — прямая с естественной топологией). Тогда $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2$ — плоскость с естественной топологией (рис. 6).

Пример 2. Топологическое произведение $T^2 = S^1 \times S^1$, где $S^1 = S^1(0, 1)$ — окружность единичного радиуса с центром в O , называется *тором* (рис. 7).

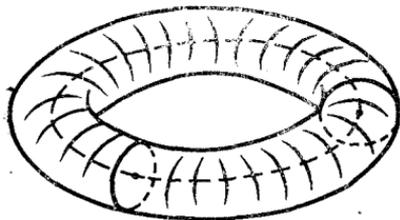


Рис. 7. Тор — топологическое произведение двух окружностей

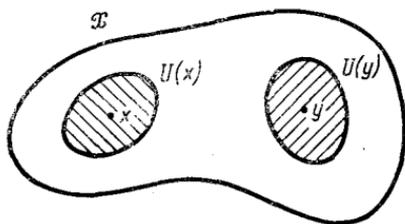


Рис. 8. Точки x и y отделимы

6°. Связность

Определение. Топологическое пространство \mathcal{X} называется *(линейно) связным*, если для любых его точек x и y существует непрерывное отображение

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X},$$

такое, что $f(0) = x$ и $f(1) = y$.

Пример 1. Координатное пространство \mathbb{R}^n (линейно) связно.

Пусть x и y — точки из \mathbb{R}^n .

Соответствующее отображение

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

задается так:

$$f(t) = (1-t)x + ty, \quad 0 \leq t \leq 1. *$$

Свойства (линейно) связных пространств.

1+. Образ (линейно) связного множества при непрерывном отображении (линейно) связан.

2+. Топологическое произведение (линейно) связных пространств (линейно) связно.

Пример 2. Окружность S^1 (линейно) связна — любые две ее точки можно соединить дугой.

Тор T^2 (линейно) связан как топологическое произведение двух (линейно) связных множеств — окружностей.

7°. Отделимость

Определение. Топологическое пространство \mathcal{X} называется *хаусдорфовым*, если у любой пары различных точек x и y из \mathcal{X} найдутся непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(y)$: $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Пример 1. Координатное пространство \mathbb{R}^n и любое его топологическое подпространство являются хаусдорфовыми пространствами (рис. 8).

Декартово произведение хаусдорфовых пространств является хаусдорфовым.

Всюду в дальнейшем будем считать топологические пространства хаусдорфовыми*.

Определение. Топологическое пространство \mathcal{X} называется *нормальным*, если оно хаусдорфово и для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 существуют непересекающиеся открытые множества $U_1 \supset F_1$ и $U_2 \supset F_2$ (рис. 9).

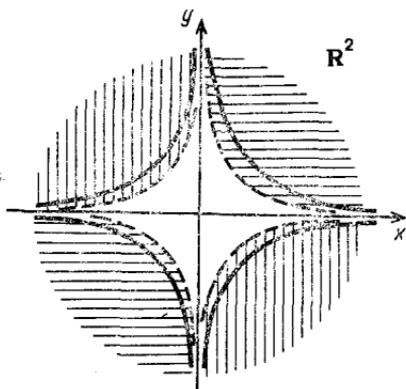


Рис. 9. Замкнутые множества $F_1 = \{(x, y) | xy \geq 1\}$ и $F_2 = \{(x, y) | xy \leq -1\}$ отделимы: $U_1 = \{(x, y) | xy > \frac{1}{4}\}$, $U_2 = \{(x, y) | xy < -\frac{1}{4}\}$

Пример 2. Координатное пространство \mathbb{R}^n с естественной топологией и любое его топологическое подпространство являются нормальными пространствами.

8°. Компактность

Пусть \mathcal{U} — подмножество топологического пространства \mathcal{X} .

Семейство $\{U_\alpha\}$ открытых множеств, такое, что любая точка из \mathcal{U} принадлежит хотя бы одному из множеств U_α , называется *открытым покрытием* \mathcal{U} .

* Хаусдорф (Hausdorff) Феликс (8.11.1868—26.1.1942) — немецкий математик.

Подпокрытие — это покрытие, все множества которого принадлежат исходному покрытию.

Определение. Топологическое пространство называется **компактным**, если всякое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Пример 1. Отрезок $[a, b]$ прямой \mathbb{R}^1 является компактным пространством.

Пример 2. Прямая \mathbb{R}^1 некомпактна: из открытого покрытия

$$\{(n-1, n+1) | n \in \mathbb{Z}\}$$

нельзя выделить конечного подпокрытия.

Свойства компактных пространств.

1+. Компактное пространство нормально.

2+. Образ компактного пространства при непрерывном отображении является компактным пространством.

3+. Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

4+. Топологическое произведение компактных пространств является компактным пространством.

5+. Компактное подмножество хаусдорфова пространства является замкнутым множеством.

9°. Топологическое многообразие

Пусть \mathcal{M} — хаусдорфово топологическое пространство.

Открытой картой на \mathcal{M} назовем пару (U, x) , где U — открытое подмножество пространства \mathcal{M} , а x — гомеоморфизм подмножества U на открытое подмножество координатного пространства \mathbb{R}^n : каждой точке p из U ставится во взаимно однозначное соответствие набор из n чисел, ее *локальных координат*

$$\begin{array}{ccc} x : p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p)). \\ \text{\scriptsize } \coprod & & \text{\scriptsize } \coprod \\ U & & x(U) \end{array}$$

Пример 1. Рассмотрим в координатном пространстве \mathbb{R}^3 единичную сферу S^2 :

$$p^1{}^2 + p^2{}^2 + p^3{}^2 = 1 \quad (\text{рис. 10}).$$

Сфера S^2 является топологическим подпространством пространства \mathbb{R}^3 . Пара (U_+, π_+) , где U_+ — множество точек (p^1, p^2, p^3) на S^2 , у которых $p^3 > 0$, а π_+ — проектирование на плоскость \mathbb{R}^2 , определяемое по правилу

$$\begin{aligned} \pi_+ : (p^1, p^2, p^3) \in U_+ &\mapsto (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2, \\ x^1 &= p^1, \quad x^2 = p^2, \end{aligned}$$

является открытой картой на S^2 (рис. 11).

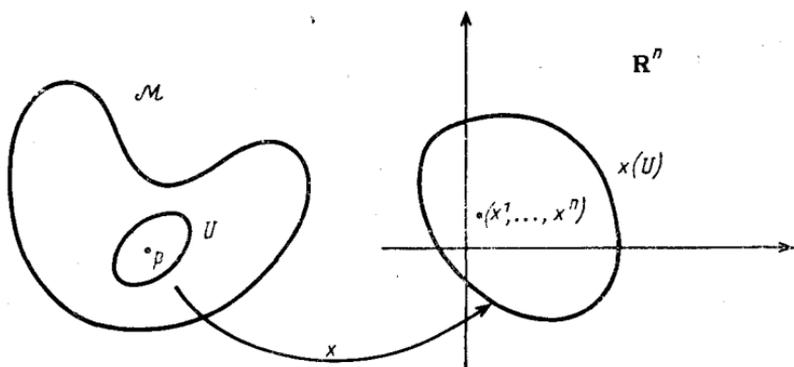


Рис. 10. Открытая карта на \mathcal{M}

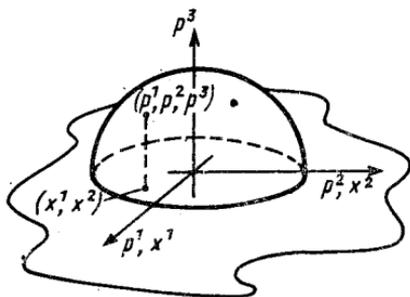


Рис. 11. Локальные координаты на верхней полусфере

В самом деле, подмножество U_+ открыто в S^2 (как пересечение S^2 с открытым полупространством $\{(p^1, p^2, p^3) \mid p^3 > 0\}$); отображение π_+ непрерывно, обратное к нему определяется так:

$$p^1 = x^1, \quad p^2 = x^2, \quad p^3 = \sqrt{1 - x^1^2 - x^2^2}$$

и также непрерывно. Образом U_+ при отображении π_+ является единичный открытый круг. *

Допустим, что на множестве \mathcal{M} существуют две открытые карты (U, x) и (V, y) , такие, что множества $x(U)$ и $y(V)$ открыты в пространстве \mathbb{R}^n . Тогда, как нетрудно проверить, отображение $y \circ x^{-1}$ является гомеоморфизмом открытой области $x(U \cap V)$ пространства \mathbb{R}^n на открытую область $y(U \cap V)$ пространства \mathbb{R}^n :

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V).$$

$$\bigcap_{\mathbb{R}^n} \quad \bigcap_{\mathbb{R}^n}$$

Это вытекает из того, что отображение, обратное гомеоморфизму, и композиция гомеоморфизмов также являются гомеоморфизмами (рис. 12).

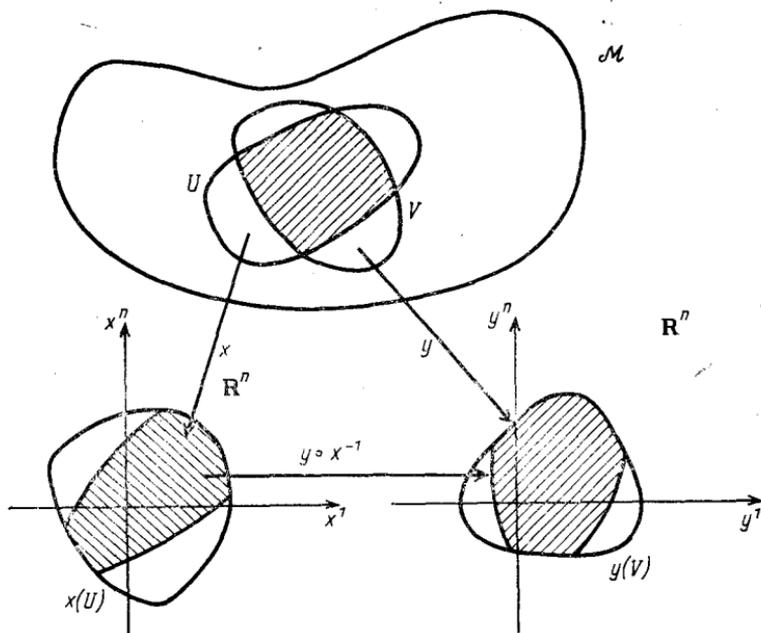


Рис. 12. Схема перехода от одной локальной карты к другой

Отображение $y \circ x^{-1}$ в локальных координатах можно задать так:

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1, \dots, x^n), \\ &\dots \dots \dots \\ y^n &= y^n(x^1, \dots, x^n). \end{aligned} \quad (*)$$

Формулы (*) называют формулами преобразования локальных координат, или формулами перехода; функции $y^i(x^1, \dots, x^n)$ называют функциями перехода.

Пример 2. Рассмотрим на сфере S^2 еще одну открытую карту (V_+, ρ_+) , где V_+ — множество точек (p^1, p^2, p^3) сферы S^2 , у которых $p^2 > 0$, а ρ_+ — проектирование V_+ на плоскость \mathbb{R}^2 , проводимое по правилу (рис. 13)

$$\begin{aligned} \rho_+ : (p^1, p^2, p^3) &\mapsto (y^1, y^2), \\ \bigcap_{V_+} & \qquad \qquad \bigcap_{\mathbb{R}^2} \\ y^1 &= p^1, \quad y^2 = p^2. \end{aligned}$$

Построим отображение $\rho_+ \circ \rho_+^{-1}$. Другими словами, выразим y^i через x^j . Имеем (рис. 14)

$$y^1 = x^1, \quad y^2 = \sqrt{1 - x^{1^2} - x^{2^2}}.$$

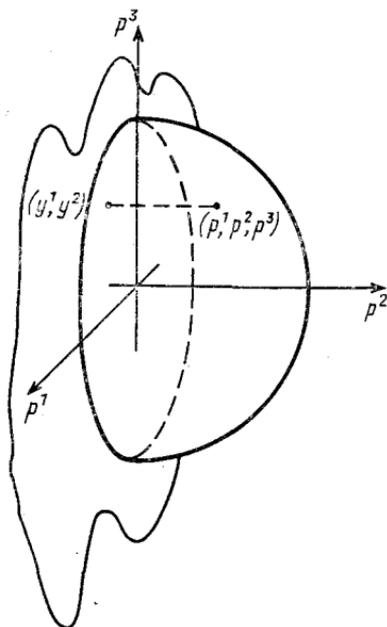


Рис. 13. Локальные координаты на правой полусфере

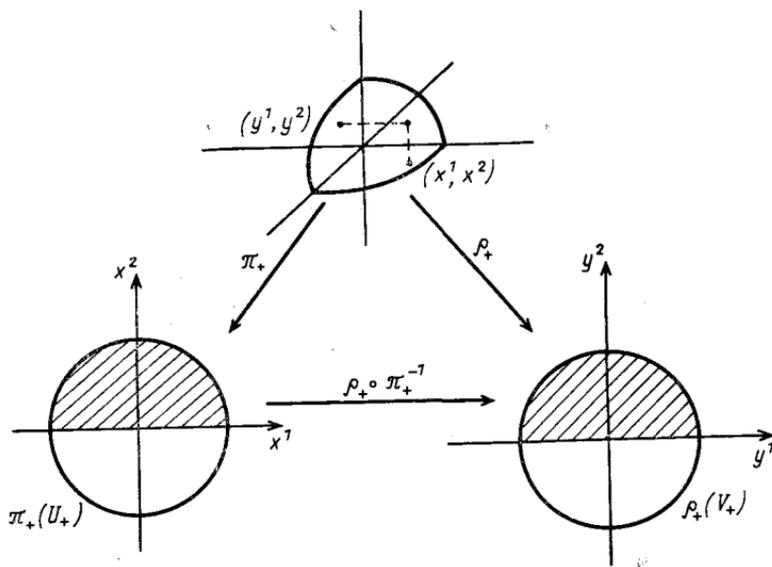


Рис. 14. Преобразование локальных координат на сфере

Аналогично строится карта $(W_+, \zeta_+) : W_+ \rightarrow S^2$ — множество точек S^2 , у которых $p^1 > 0$,

$$\zeta_+ : (p^1, p^2, p^3) \mapsto (z^1, z^2),$$

$$z^1 = p^2, \quad z^2 = p^3. \quad *$$

Пусть A — конечное или счетное множество.

Топологическое пространство \mathcal{M} будем называть n -мерным топологическим многообразием, если найдется набор открытых карт (U_α, x_α) , $\alpha \in A$, такой, что:

1) для любого α из множества индексов A $x_\alpha(U_\alpha)$ является открытым подмножеством пространства \mathbb{R}^n ;

2) $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Такой набор карт называется атласом топологического многообразия (рис. 15).

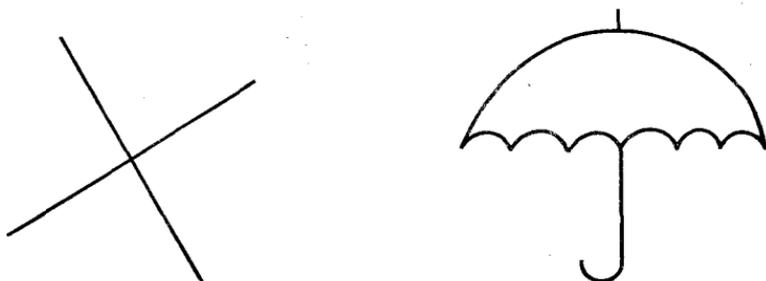


Рис. 15. Топологические пространства, не являющиеся топологическими многообразиями

Обозначение: $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$.

Если (U_α, x_α) и (U_β, x_β) — произвольные карты из атласа \mathfrak{A} топологического многообразия \mathcal{M} , то отображение

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\bigcap_{\mathbb{R}^n} \qquad \qquad \qquad \bigcap_{\mathbb{R}^n}$$

непрерывно; оно отображает открытую область пространства \mathbb{R}^n на открытую область пространства \mathbb{R}^n .

Пример 3. Сфера S^2 представляет собой двумерное топологическое многообразие: атлас сферы образуют шесть карт

$$(U_\pm, \pi_\pm), (V_\pm, \rho_\pm), (W_\pm, \zeta_\pm);$$

здесь U_- — множество точек S^2 , у которых $\rho^3 < 0$,

$$\pi_- : \begin{matrix} (\rho^1, \rho^2, \rho^3) \\ \bigcap \\ U_- \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} (x^1, x^2) \\ \bigcap \\ \mathbb{R}^2 \end{matrix},$$

$$x^1 = \rho^1, \quad x^2 = \rho^2$$

Карты (V_-, ρ_-) и (W_-, ζ_-) определяются аналогично. *

Пример 4. Множество $\mathbb{R}_{2 \times 2}$ невырожденных матриц второго порядка с вещественными элементами является четырехмер-

ным топологическим многообразием. Это вытекает из того, что множество

$$Q = \{(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}) \mid \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0\}$$

открыто в \mathbf{R}^4 , а отображение $\mathbf{R}_{2 \times 2}^*$ на Q , определяемое по правилу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \mapsto (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}),$$

является гомеоморфизмом. *

Одно и то же топологическое многообразие имеет много различных атласов.

Пример 5. Рассмотрим в пространстве \mathbf{R}^{n+1} n -мерную сферу S^n — множество точек $p = (p^1, \dots, p^{n+1})$, координаты p^1, \dots, p^{n+1} которых удовлетворяют равенству

$$\sum_{i=1}^{n+1} (p^i)^2 = 1.$$

Пара $(S^n \setminus N, \pi_N)$, где $N = (0, \dots, 0, 1)$ — северный полюс, а π_N — стереографическая проекция из N на пространство \mathbf{R}^n , определяемая по правилу

$$\pi_N : p = (p^1, \dots, p^{n+1}) \mapsto (x^1, \dots, x^n),$$

$$x^i = \frac{p^i}{1 - p^{n+1}} \quad (i = 1, \dots, n),$$

является открытой картой на S^n (рис. 16).

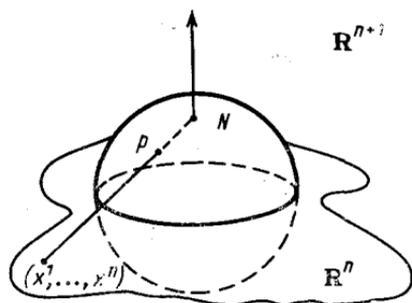


Рис. 16. Стереографическая проекция (из «северного» полюса)

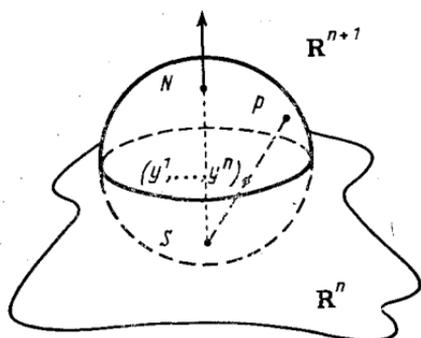


Рис. 17. Стереографическая проекция (из «южного» полюса)

В самом деле, подмножество $S^n \setminus N$ открыто в S^n (как дополнение к замкнутому множеству — точке N). Отображение π_N непрерывно; обратное к нему определяется так:

$$\rho^k = \frac{2x^k}{1 + \sum_{j=1}^n x^j}, \quad \rho^{n+1} = \frac{1 - \sum_{i=1}^n x^i}{1 + \sum_{i=1}^n x^i} \quad k=1, \dots, n$$

и тоже непрерывно. Ясно, что $\pi_N(S^n \setminus N) = \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим на S^n еще одну открытую карту $-(S^n \setminus S, \pi_S)$, где $S = (0, \dots, 0, -1)$ — южный полюс, а π_S — стереографическая проекция из S на пространство \mathbb{R}^n :

$$\pi_S: \rho = (\rho^1, \dots, \rho^{n+1}) \mapsto (y^1, \dots, y^n),$$

$$y^j = \frac{\rho^j}{1 + \rho^{n+1}} \quad (j=1, \dots, n)$$

и $\pi_S(S^n \setminus S) = \mathbb{R}^n$ (рис. 17).

Карты $(S^n \setminus N, \pi_N)$ и $(S^n \setminus S, \pi_S)$ образуют атлас сферы S^n . Тем самым сфера S^n — n -мерное топологическое многообразие.

При $n=2$ получаем еще один атлас для двумерной сферы S^2 (состоящий из двух карт): $(S^2 \setminus N, \pi_N)$ и $(S^2 \setminus S, \pi_S)$.

Построим отображение $\pi_S \circ \pi_N^{-1}$, т. е. выразим y^j через x^i .

Подставляя в равенство

$$\frac{\rho^i}{x^i} + \frac{\rho^i}{y^i} = 2 \quad (i=1, \dots, n)$$

выражение для ρ^i через x^i , после простых вычислений получаем, что

$$y^j = \frac{x^j}{\sum_{i=1}^n (x^i)^2} \quad (j=1, \dots, n) *$$

§ 2. ГЛАДКИЕ МНОГОБРАЗИЯ

1°. Основное определение

Пусть \mathcal{M} — n -мерное топологическое многообразие и \mathfrak{A} — атлас многообразия \mathcal{M} . Возьмем в атласе \mathfrak{A} две любые карты (U, x) и (V, y) .

Определение. Координатное преобразование

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$$

$$\begin{array}{ccc} & \cap & \cap \\ & \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \end{array}$$

называется *гладким*, если описывающие его функции перехода

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n = y^n(x^1, \dots, x^n)$$

имеют в открытой области $x(U \cap V)$ непрерывные частные производные всех порядков (бесконечно дифференцируемы, принадлежат классу C^∞) и якобиан

$$\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right)$$

отличен от нуля.

Это позволяет утверждать, что и координатное преобразование $x \circ y^{-1}$ также будет гладким, т. е. соответствующие функции перехода

$$x^1 = x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n = x^n(y^1, \dots, y^n)$$

будут иметь в области $y(U \cap V)$ непрерывные частные производные всех порядков.

Определение. Будем говорить, что n -мерное топологическое многообразие \mathcal{M} имеет *гладкую структуру*, если существует атлас \mathfrak{A} многообразия, обладающий следующими свойствами:

1) для любых двух карт из \mathfrak{A} соответствующее координатное преобразование является гладким;

2) атлас \mathfrak{A} максимален.

Разъяснение. Под максимальнойностью атласа \mathfrak{A} понимается следующее.

Пусть (W, z) — открытая карта, такая, что для любой карты (U, x) из атласа \mathfrak{A} преобразование

$$z \circ x^{-1} : x \left(\underset{\cap}{U} \cap \underset{\cap}{W} \right) \rightarrow z \left(\underset{\cap}{U} \cap \underset{\cap}{W} \right)$$

является гладким. Тогда карта (W, z) также принадлежит атласу \mathfrak{A} . *

На практике для того, чтобы убедиться в том, что многообразие имеет гладкую структуру, достаточно проверить только выполнение условия 1. Это вытекает из того, что любой атлас можно дополнить, притом единственным образом, до максимального.

Подобное дополнение строят при помощи всевозможных допустимых карт.

Определение. Карта (W, z) называется *допустимой* для данного атласа \mathfrak{A} , если для любой карты (U, x) из \mathfrak{A} отображение

$$z \circ x^{-1} : x \left(\underset{\cap}{U} \cap \underset{\cap}{W} \right) \rightarrow z \left(\underset{\cap}{U} \cap \underset{\cap}{W} \right)$$

является гладким.

В дальнейшем, когда это потребует, будем считать, что допустимая карта принадлежит заданному атласу.

Пример. Рассмотрим на прямой \mathbb{R}^1 атлас, состоящий из одной карты (\mathbb{R}^1, x) , где $x : p^1 \mapsto x^1 = p^1$ — тождественное преобразо-

вание. Открытая карта (\mathbb{R}^1, y) , где $y: p^1 \mapsto y^1 = (p^1)^3$, не является допустимой. Координатные преобразования имеют вид

$$y^1 = (x^1)^3, \quad x^1 = \sqrt[3]{y^1}$$

соответственно. Первая из этих функций имеет непрерывные частные производные всех порядков, у второй нет в нуле даже первой производной. *

З а м е ч а н и е. В приложениях встречаются случаи как гладкой структуры порядка k (функции перехода $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ ($i=1, \dots, n$) имеют в области задания непрерывные частные производные до порядка k включительно, принадлежат классу C^k), так и аналитической структуры (функции $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ ($i=1, \dots, n$) являются аналитическими, принадлежат классу C^∞).

О п р е д е л е н и е. n -мерное топологическое многообразие, имеющее гладкую структуру, называется n -мерным гладким многообразием.

Иногда, чтобы уточнить порядок гладкости, говорят о многообразии класса C^∞ , или класса C^k , или класса C^a .

Можно сказать и так: гладкое многообразие — это топологическое многообразие, у которого все координатные преобразования являются гладкими.

П р и м е р 1. Координатное пространство \mathbb{R}^n является n -мерным гладким многообразием: атлас состоит из одной открытой карты $(\mathbb{R}^n, I_{\mathbb{R}^n})$, где $I_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — тождественное отображение. *

П р и м е р 2. Сфера S^n из пространства \mathbb{R}^{n+1} является n -мерным гладким многообразием: соответствующий атлас состоит из двух карт $(S^n \setminus N, \pi_N)$ и $(S^n \setminus S, \pi_S)$.

Проверим это:

- 1) $(S^n \setminus N) \cup (S^n \setminus S) = S^n$;
- 2) функции перехода

$$y^j = \frac{x^j}{\sum_{i=1}^n x^{i^2}} \quad (j=1, \dots, n),$$

описывающие отображение $\pi_S \circ \pi_N^{-1}$, имеют в $\mathbb{R}^n \setminus (0, \dots, 0)$ непрерывные частные производные всех порядков. *

П р и м е р 3. Множество $\mathbb{R}_{2 \times 2}^*$ невырожденных вещественных матриц второго порядка — четырехмерное гладкое многообразие. *

Пусть \mathcal{M} — гладкое многообразие и \mathcal{A} — атлас \mathcal{M} . Карту (U, x) из \mathcal{A} часто называют *локальной картой* на многообразии, или *локальной координатной системой* на \mathcal{M} .

Если $p \in U$ и $x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, то область U называют *координатной окрестностью* точки p , а числа $x^1(p), \dots, x^n(p)$ — *локальными координатами* точки p .

Пусть p — произвольная точка n -мерного гладкого многообразия \mathcal{M} . В атласе \mathfrak{A} всегда найдется карта (U, x) , такая, что U — координатная окрестность точки p . Не ограничивая общности, можно считать, что

- 1) $x(p) = (0, \dots, 0)$;
- 2) $x(U)$ — открытый шар пространства \mathbb{R}^n с центром в точке $(0, \dots, 0)$.

Покажем это.

1. Пусть (V, y) , $p \in V$, — карта из \mathfrak{A} и

$$y^i(p) = \alpha^i \quad (i=1, \dots, n).$$

Построим новое отображение (рис. 18)

$$x: V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

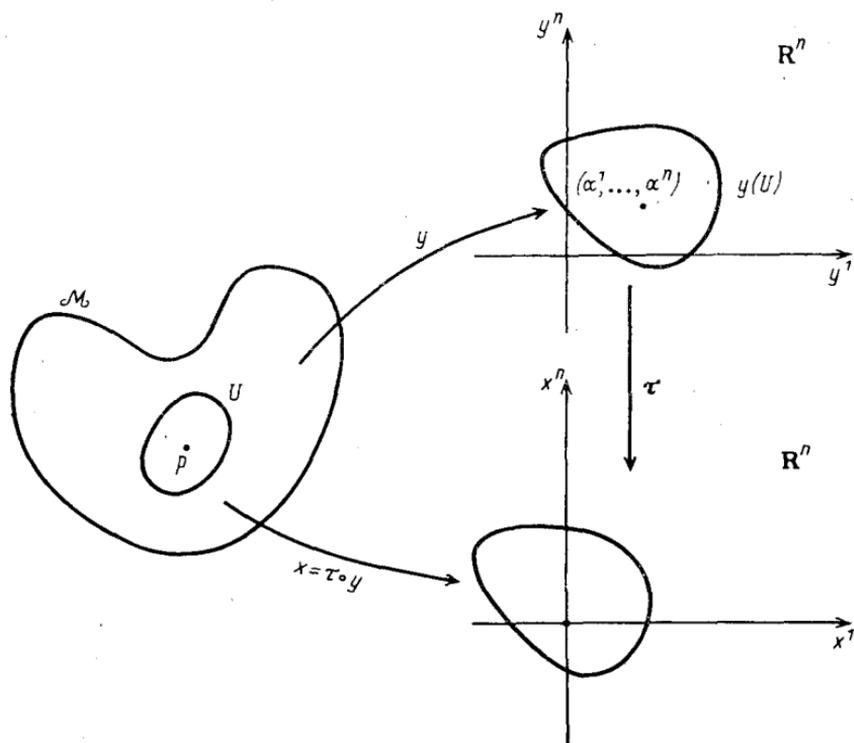


Рис. 18. Точка p имеет нулевые локальные координаты

по правилу

$$x = \tau \circ y,$$

где $\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — сдвиг, определяемый формулой

$$\tau(y^1, \dots, y^n) = (x^1, \dots, x^n) = (y^1 - \alpha^1, \dots, y^n - \alpha^n)$$

2. Пусть (V, x) , $p \in V$, — карта из \mathfrak{A} и $x^i(p) = 0$, $(i=1, \dots, n)$.

Так как точка $O=(0, \dots, 0)$ принадлежит открытой области $x(V)$ пространства \mathbb{R}^n , то существует открытый шар $B^n(0, r)$ с центром в этой точке, целиком лежащий в $x(V)$. Его прообраз $U = x^{-1}(B^n(0, r))$ — открытое множество многообразия \mathcal{M} (рис. 19). *

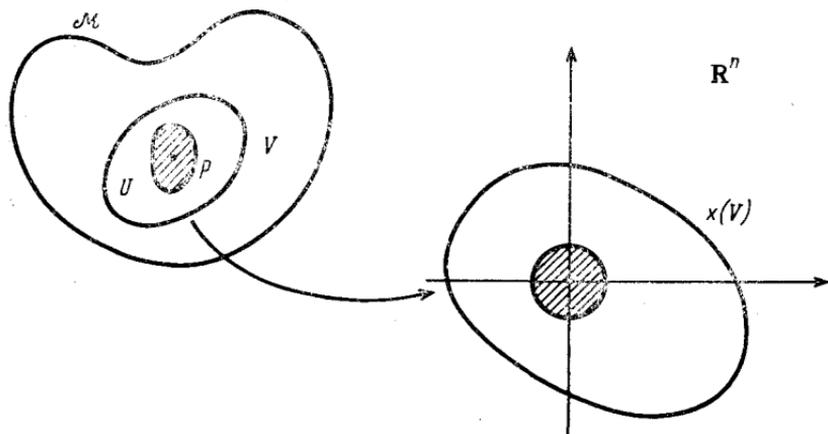


Рис. 19. Указанной окрестности точки p соответствует шар в пространстве \mathbb{R}^n

Пара (U, x) — открытая карта многообразия \mathcal{M} , обладающая свойствами 1—2 и допустимая для заданного атласа \mathfrak{A} . *

Таким образом, в случае необходимости всегда можно считать, что атлас \mathfrak{A} n -мерного гладкого многообразия \mathcal{M} состоит из карт (U, x) , таких, что $x(U)$ — n -мерный открытый шар пространства \mathbb{R}^n с центром в начале координат (при этом можно считать, что радиус этого шара один и тот же для всех карт из \mathfrak{A}).

2°. Гладкие функции

Пусть на гладком многообразии \mathcal{M} задана функция

$$f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R},$$

т. е. каждой точке p многообразия \mathcal{M} по определенному правилу ставится в соответствие число $u=f(p)$.

Пусть p — заданная точка.

Возьмем локальную карту (U, x) * так, чтобы $p \in U$. Тогда с заданной функцией $f(p)$ можно связать обычную функцию от n переменных x^1, \dots, x^n , областью определения которой является открытая карта $x(U)$ координатного пространства \mathbb{R}^n .

* Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только локальные карты, допустимые для заданного атласа.

Эта функция строится по следующему правилу:

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = (f \circ x^{-1})(x^1, \dots, x^n),$$

где $(x^1, \dots, x^n) \in x(U) \subset \mathbb{R}^n$ (рис. 20).

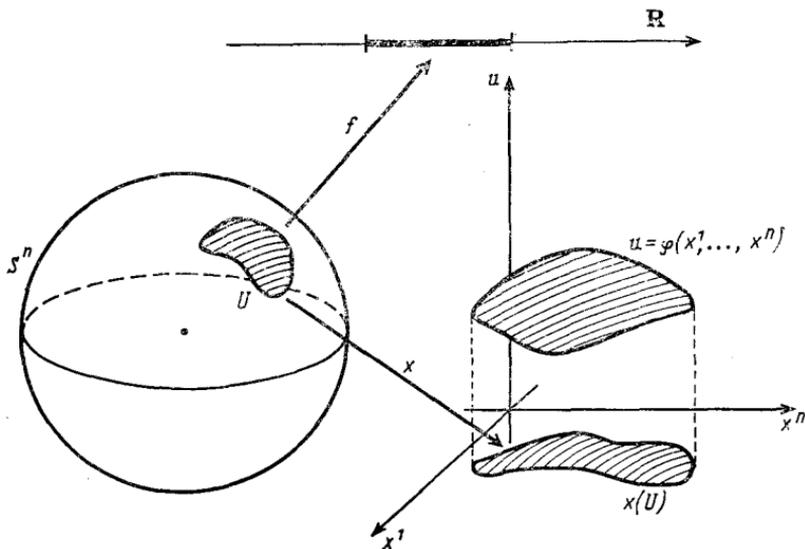


Рис. 20. График функции f , заданной на сфере, в локальных координатах

Ясно, что построенная функция зависит от выбора локальной карты (U, x) .

Пусть (V, y) , $p \in V$, — другая локальная карта.

Поступая по описанному выше правилу, получим функцию

$$\psi(y^1, \dots, y^n) = (f \circ y^{-1})(y^1, \dots, y^n),$$

где $(y^1, \dots, y^n) \in y(V) \subset \mathbb{R}^n$.

Если потребовать, чтобы функция f имела в открытой области $x(U)$ пространства \mathbb{R}^n непрерывные частные производные всех порядков, т. е. чтобы $\varphi(x^1, \dots, x^n) \in C^\infty$, то и функция $\psi(y^1, \dots, y^n)$ в области $(y \circ x^{-1})(U \cap V)$ пространства \mathbb{R}^n будет принадлежать классу C^∞ .

Покажем это.

Из соотношения

$$\psi = f \circ y^{-1} = (f \circ x^{-1}) \circ (x \circ y^{-1}) = \varphi \circ (x \circ y^{-1}),$$

справедливого в открытой области $(y \circ x^{-1})(U \cap V)$, и того факта, что и функция φ и координатное преобразование $x \circ y^{-1}$ принадлежат классу C^∞ , вытекает, что функция ψ как композиция функции φ и координатного преобразования $x \circ y^{-1}$ также имеет в области $(y \circ x^{-1})(U \cap V)$ непрерывные частные производные всех порядков. *

Определение. Функция f , заданная на гладком многообразии \mathcal{M} , называется *гладкой*, если для любой точки p из \mathcal{M} можно указать локальную карту (U, x) , такую, что $p \in U$ и функция $\varphi = f \circ x^{-1}$ имеет в открытом множестве $x(U)$ пространства \mathbb{R}^n непрерывные частные производные всех порядков.

Множество всех гладких функций на многообразии \mathcal{M} будем обозначать так: $C^\infty(\mathcal{M})$.

Множество $C^\infty(\mathcal{M})$ обладает следующим легко проверяемым свойством: если f и g — функции из $C^\infty(\mathcal{M})$, то $f+g$ и $f \cdot g$ также принадлежат $C^\infty(\mathcal{M})$.

Если функция f задана не на всем многообразии, а лишь на некотором его открытом подмножестве W , то совершенно аналогично можно ввести понятие гладкой функции на W и множество $C^\infty(W)$.

Наконец, будем обозначать через $C^\infty(p)$, где p — фиксированная точка многообразия \mathcal{M} , совокупность функций, обладающих следующим свойством: $f \in C^\infty(p)$, если существует открытая окрестность U точки p , в которой функция f является гладкой.

Отметим, что для разных функций из $C^\infty(p)$ такие окрестности, вообще говоря, различны.

Пример. Пусть p — произвольная точка гладкого многообразия \mathcal{M} , (U, x) — содержащая ее карта. Тогда каждой точке q из U ставится в соответствие n чисел $x^1(q), \dots, x^n(q)$. Тем самым на множестве U задаются n функций.

Возьмем одну из них, например i -ю:

$$x^i = x^i(q),$$

и покажем, что $x^i \in C^\infty(U)$.

В соответствии с определением имеем

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = (x^i \circ x^{-1})(x^1, \dots, x^n) = x^i.$$

Нетрудно заметить, что эта функция имеет непрерывные частные производные всех порядков:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_k^i,$$

а все производные порядка выше первого равны нулю. *

3°. Разбиение единицы

Пусть \mathcal{M} — гладкое многообразие.

Носителем функции

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R},$$

заданной на многообразии \mathcal{M} , называется замыкание множества точек p из \mathcal{M} , в которых $f(p) \neq 0$.

Обозначение: $\text{supp } f$.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(x^2 - a^2)^2}\right), & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases}$$

заданную на прямой \mathbb{R}^1 (рис. 21). Она имеет непрерывные частные производные всех порядков (является гладкой на \mathbb{R}^1), ее носитель совпадает с отрезком $[-a, a]$. *

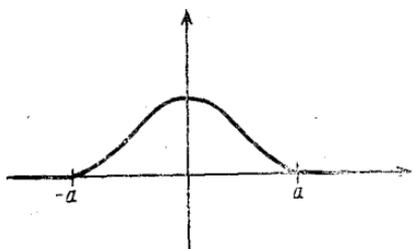


Рис. 21. Бесконечно дифференцируемая финитная функция

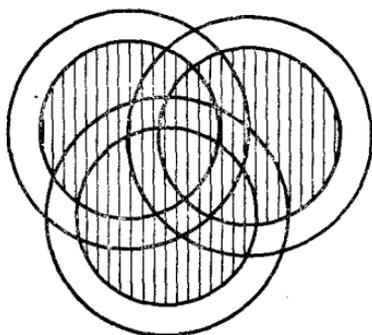


Рис. 22. Так располагаются множества покрытия и носители функций, дающие разбиение единицы

Пример 2. Пользуясь предыдущим примером, нетрудно построить гладкую на \mathbb{R}^n функцию $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, носитель $\text{supp } g$ которой совпадает с n -мерным замкнутым шаром

$$\overline{B^n(0, a)} = \{(p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n \mid |p| \leq a\}.$$

Достаточно положить

$$g(x^1, \dots, x^n) = h((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2). *$$

Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие многообразия \mathcal{M} .

Определение. Система гладких функций

$$\varphi_i: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

называется (гладким) разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{U_i\}$, если она обладает следующими свойствами:

- 1) $0 \leq \varphi_i \leq 1$ для всех p из \mathcal{M} и для любого i ;
- 2) $\text{supp } \varphi_i \subset U_i$ для любого i ;
- 3) $\sum_i \varphi_i(p) = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть \mathcal{M} — гладкое многообразие и $\mathfrak{A} = \{(U_i, \chi_i)\}$ — атлас на \mathcal{M} . Тогда существует гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$ (рис. 22).

* Доказательство проведем для случая, когда \mathcal{M} компактно. Поэтому можно считать, что атлас \mathfrak{U} состоит из конечного числа карт. Кроме того, для любой карты (U_i, x_i) из \mathfrak{U} множество $x_i(U_i)$ — n -мерный открытый шар $B^n(O, b)$ с центром в точке O и радиусом b .

Выберем $a < b$ так, чтобы множества $x_i^{-1}(B^n(O, a))$ также покрывали \mathcal{M} (рис. 23).

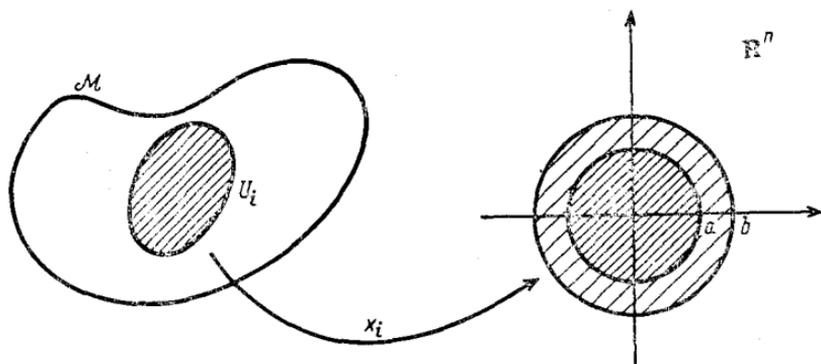


Рис. 23. Построение одного элемента разбиения единицы

Положим

$$f_i(p) = \begin{cases} g(x_i(p)), & \text{если } p \in U_i, \\ 0, & \text{если } p \notin U_i. \end{cases}$$

Функции $f_i(p)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $0 \leq f_i(p) \leq 1$;
- 2) $x_i^{-1}(B^n(O, a)) = \text{supp } f_i \subset U_i$;
- 3) $f(p) = \sum_i f_i(p) > 0$;
- 4) f_i — гладкие функции на многообразии \mathcal{M} .

Поэтому функции

$$\varphi_i(p) = \frac{f_i(p)}{f(p)}$$

образуют требуемое разбиение. *

4°. Произведение гладких многообразий

Пусть \mathcal{M} и \mathcal{N} — гладкие многообразия размерностей n и k соответственно.

Введем на топологическом произведении $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ гладкую структуру.

Построим атлас $\mathfrak{U}(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$.

Пусть (U, x) — произвольная карта из атласа $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$ и (V, y) — произвольная карта из атласа $\mathfrak{U}(\mathcal{N})$ (рис. 24).

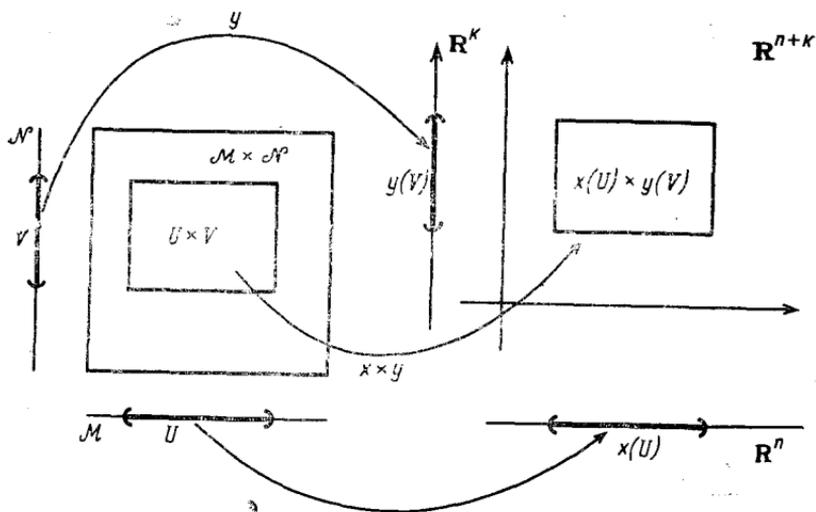


Рис. 24. Произведение многообразий

Атлас $\mathfrak{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$ произведения $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ составим из карт вида (W, z) , где $W = U \times V$, а отображение

$$z = x \times y : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

задается формулой

$$z(p, q) = (x \times y)(p, q) = (x(p), y(q)).$$

Пример. Тор $T^2 = S^1 \times S^1$ — гладкое многообразие (как произведение двух окружностей).

§ 3. КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1°. Касательный вектор

В основу построения касательного вектора в точках гладкого многообразия можно положить известную связь между вектором, заданным в точке координатного пространства \mathbb{R}^n , и операцией вычисления производной по направлению от заданной в этом пространстве функции.

Пусть ξ_p — вектор координатного пространства \mathbb{R}^n , заданный в точке $p \in \mathbb{R}^n$. Тогда для любой гладкой функции f , заданной в окрестности точки p , определена производная по направлению, задаваемому вектором ξ_p (рис. 25):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|_p = (\text{grad } f, \xi)_p,$$

или в координатах

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \Big|_p = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(p)$$

Будем называть ее производной гладкой функции f по вектору ξ в точке p и обозначать через $\xi_p f$.

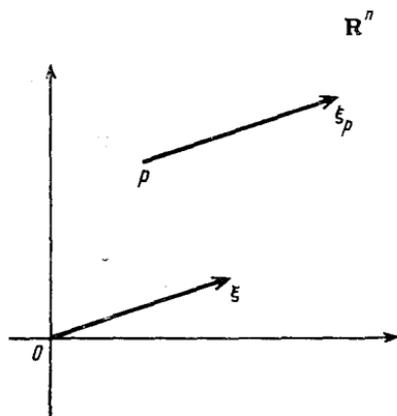


Рис. 25. Вектор ξ задает направление в каждой точке p

Таким образом, по заданному вектору на множестве $C^\infty(p)$ гладких функций в окрестности точки p определена операция

$$\xi_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbf{R},$$

проводимая по указанному выше правилу

$$\xi_p : f(p) \mapsto \xi_p f.$$

Эта операция обладает следующими свойствами:

$$1^+. \xi_p(f + g) = \xi_p f + \xi_p g.$$

$$2^+. \xi_p(\alpha f) = \alpha \xi_p f.$$

$$3^+. \xi_p(f \cdot g) = \xi_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot \xi_p g$$

(здесь f и g — произвольные функции из множества $C^\infty(p)$, α — число).

З а м е ч а н и е. Интересно отметить следующий факт (позже мы докажем это).

Пусть $\mu : C^\infty(p) \rightarrow \mathbf{R}$ — некоторое отображение, подчиненное требованиям:

$$1^*. \mu(f + g) = \mu(f) + \mu(g).$$

$$2^*. \mu(\alpha f) = \alpha \mu(f), \quad \alpha — \text{число.}$$

$$3^*. \mu(f \cdot g) = \mu(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \mu(g).$$

(*)

Тогда существует, и притом ровно один, вектор ξ , такой, что

$$\xi_p f = \mu(f)$$

для любой функции f из множества $C^\infty(p)$.

Такое взаимно однозначное соответствие между векторами из \mathbf{R}^n и отображениями со свойствами (*) позволяет как бы отождествить вектор и операцию вычисления производной гладкой функции по этому вектору.

Одновременно сделанное наблюдение открывает возможность введения касательного вектора в точке гладкого многообразия.

Определение. Касательным вектором в точке p многообразия \mathcal{M} называется правило

$$X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbf{R},$$

которое каждой функции f из множества $C^\infty(p)$ ставит в соответствие число $X_p f$ и обладает следующими свойствами:

$$1+. X_p(f+g) = X_p f + X_p g.$$

$$2+. X_p(\alpha f) = \alpha X_p f.$$

$$3+. X_p(f \cdot g) = X_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g)$$

(здесь $f, g \in C^\infty(p)$, $\alpha \in \mathbf{R}$).

Пусть X_p — касательный вектор, $\alpha \in \mathbf{R}$ — произвольное число.

Покажем, что

$$X_p(\alpha) = 0.$$

* Из соотношений

$$X_p(1) = X_p(1 \cdot 1) = X_p(1) \cdot 1 + 1 \cdot X_p(1) = 2X_p(1)$$

получаем, что

$$X_p(1) = 0.$$

Отсюда

$$X_p(\alpha) = X_p(\alpha \cdot 1) = \alpha X_p(1) = \alpha \cdot 0 = 0. *$$

2°. Касательное пространство

Множество всех касательных векторов в точке p гладкого многообразия \mathcal{M} обозначим через $T_p \mathcal{M}$. Это множество непусто: ему принадлежит нулевой вектор O_p — нулевое отображение

$$O_p : f \mapsto 0.$$

Определим на множестве $T_p \mathcal{M}$ операции сложения касательных векторов и умножения касательного вектора на число.

Пусть $X_p, Y_p \in T_p \mathcal{M}$, $f \in C^\infty(p)$ и $\alpha \in \mathbf{R}$. Положим

$$(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f,$$

$$(\alpha X_p)f = \alpha X_p f.$$

Нетрудно проверить, что и $\sum X_p + Y_p$ касательных векторов X_p и Y_p , и произведение αX_p касательного вектора X_p на число α также являются касательными векторами.

Тем самым множество $T_p \mathcal{M}$ превращается в вещественное линейное пространство. Его называют *касательным пространством* гладкого многообразия \mathcal{M} в точке p .

Найдем размерность касательного пространства $T_p \mathcal{M}$.

Пусть (U, x) — локальная карта (система координат) и $p \in U$. Тогда для любой функции $f \in C^\infty(p)$ можно построить обычную бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi = f \circ x^{-1}$, определенную на открытом подмножестве $x(U)$ пространства \mathbb{R}^n *

Вычисляя частные производные функции φ по переменным x^1, \dots, x^n , получим

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi(x(p)) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ x^{-1}) \right|_{x(p)} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Тем самым каждой функции $f \in C^\infty(p)$ ставится в соответствие n чисел:

$$f \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^1} (f \circ x^{-1}) \right|_{x(p)}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} (f \circ x^{-1}) \right|_{x(p)}.$$

Вывод: выбор системы локальных координат определяет в касательном пространстве $T_p \mathcal{M}$ n векторов, действующих по праву

$$f \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ x^{-1}) \right|_{x(p)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Эти векторы принято обозначать так:

$$\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

Имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ x^{-1}) \right|_{x(p)}.$$

Пример. Пусть $z = \varphi(x^1, \dots, x^n)$ — обычная функция n переменных. С каждой производной по направлению $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \xi^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \dots + \xi^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

естественно связан оператор дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n} = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

* Строго говоря, дело обстоит несколько иначе. Из условия $f \in C^\infty(p)$ вытекает существование окрестности V точки p , в которой функция f является гладкой. Поэтому функция $\varphi = f \circ x^{-1}$ является бесконечно дифференцируемой в области $x(U \cap V)$.

ТЕОРЕМА 2. Векторы

$$\partial_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \partial_n = \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$$

образуют базис касательного пространства $T_p\mathcal{M}$.

Доказательство опирается на следующий простой факт.

ЛЕММА. Пусть функция $\varphi(x^1, \dots, x^n)$ определена в открытом шаре пространства \mathbb{R}^n с центром в точке $(0, \dots, 0)$ и имеет в этом шаре непрерывные частные производные всех порядков, т. е. принадлежит классу C^∞ .

Тогда существуют функции $\varphi_i(x)$ класса C^∞ , такие, что

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^n x^i \varphi_i(x), \quad \varphi_i(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(0). \quad (1)$$

* Проведем тождество

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = \varphi(0, \dots, 0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(tx^1, \dots, tx^n) dt$$

дифференцирование под знаком интеграла, получим

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = \varphi(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n x^i \varphi_i(x^1, \dots, x^n).$$

Функции φ_i определяются равенствами

$$\varphi_i(x^1, \dots, x^n) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(tx^1, \dots, tx^n) dt$$

и также принадлежат классу C^∞ в рассматриваемом шаре.

Ясно, что $\varphi_i(0, \dots, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(0, \dots, 0)$. *

Обратимся к доказательству теоремы.

* Покажем сначала, что касательные векторы

$$\partial_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \partial_n = \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$$

порождают все касательное пространство $T_p\mathcal{M}$.

Пусть $X_p \in T_p\mathcal{M}$. Без ограничения общности можно считать, что локальная карта (U, x) обладает следующими свойствами:

- 1) $x^i(p) = 0, \quad i=1, \dots, n;$
- 2) $x(U)$ — открытый шар в \mathbb{R}^n .

Заменяя в формуле (1) φ на $f \circ x^{-1}$, получим

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^n x^i f_i(q),$$

где q — произвольная точка из U и

$$f_i(p) = \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ x^{-1})(x(p)).$$

Перейдем к непосредственному вычислению $X_p f$. Имеем

$$\begin{aligned} X_p f &= X_p \left(f(p) + \sum_{i=1}^n x^i f_i(q) \right) = X_p(f(p)) + \sum_{i=1}^n (X_p x^i f_i(p) + x^i(p) X_p f_i) = \\ &= 0 + \sum_{i=1}^n (X_p x^i \cdot f_i(p) + 0 \cdot X_p f_i) = \sum_{i=1}^n X_p x^i f_i(p) = \\ &= \sum_{i=1}^n X_p x^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ x^{-1}) \Big|_{x(p)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$X_p f = \sum_{i=1}^n X_p x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f. \quad (2)$$

Отсюда в силу произвольности функции $f \in C^\infty(p)$ заключаем, что

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_p x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \sum_{i=1}^n X_p x^i \partial_i. \quad (3)$$

Покажем теперь, что векторы

$$\partial_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \partial_n = \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$$

линейно независимы.

Пусть

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i \partial_i = 0_p.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 = 0_p x^j &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \partial_i \right) x^j = \left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) x^j = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} (x^j \circ x^{-1})(x(p)). \end{aligned}$$

Но

$$(x^j \circ x^{-1})(x(p)) = x^j$$

и

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j.$$

Поэтому

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha^i \delta_i^j = \alpha^j.$$

Таким образом, $\partial_1, \dots, \partial_n$ — базис $T_p \mathcal{M}$. *

СЛЕДСТВИЕ. $\dim T_p \mathcal{M} = \dim \mathcal{M}$.

Выбирая другую локальную карту (V, y) , $p \in V$, получаем еще один базис касательного пространства

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n} \right)_p.$$

Векторы этого базиса выражаются через векторы базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p$, $= 1, \dots, n$, по формуле

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(y(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p. \quad (4)$$

Покажем это.

Пусть $f \in C^\infty(p)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p f &= \frac{\partial}{\partial y^i} (f \circ y^{-1})(y(p)) = \frac{\partial}{\partial y^i} ((f \circ x^{-1}) \circ (x \circ y^{-1}))(y(p)) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ x^{-1})(x(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial y^i} (x \circ y^{-1})(y(p)) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x(p)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p f. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности функции f получаем формулу (4). *

Впрочем, формулу (4) можно получить и непосредственно из разложения (3), полагая в нем

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p, \quad i = 1, \dots, n,$$

З а м е ч а н и е 1. Пусть $\mathcal{M} = \mathbf{R}^n$ и μ — некоторое отображение со свойствами (*) пункта 1°, т. е. $\mu \in T_p \mathbf{R}^n$. Тогда в \mathbf{R}^n существует, и притом ровно один, вектор ξ , такой, что

$$\mu f = (\text{grad } f, \xi)_p.$$

* В самом деле, выберем в пространстве \mathbf{R}^n каноническую систему координат $(U, x) : U = \mathbf{R}^n, x = 1_{\mathbf{R}^n}$. Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Полагая в формуле (2) $\mu = X_p$, получим

$$\mu f = \sum_{i=1}^n \mu x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f = \sum_{i=1}^n \mu x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Вводя обозначение

$$\xi^i = \mu x^i,$$

приходим к требуемой формуле:

$$\mu f = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p = (\text{grad } f, \xi)_p,$$

где $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$. *

З а м е ч а н и е 2. Касательные пространства $T_p \mathcal{M}$ и $T_q \mathcal{M}$, где $p \neq q$, не имеют общих элементов. В частности, $O_p \neq O_q$.

§ 4. ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1°. Гладкое отображение. Диффеоморфизм

Пусть \mathcal{M} и \mathcal{N} — гладкие многообразия размерностей n и k соответственно.

О п р е д е л е н и е. Отображение

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

называется *гладким в точке p* многообразия \mathcal{M} , если существуют локальная карта (U, x) , $p \in U$, и локальная карта (V, y) , $q = f(p) \in V$, такие, что отображение

$$g = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbf{R}^k$$

$$\cap$$

$$\mathbf{R}^n$$

является гладким (бесконечно дифференцируемым) (рис. 26).

В локальных координатах отображение f задается так:

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^k = y^k(x^1, \dots, x^n),$$

где (x^1, \dots, x^n) изменяется в открытой области пространства \mathbf{R}^n .

Данное определение гладкости отображения в точке корректно (не зависит от выбора локальных карт).

Покажем это.

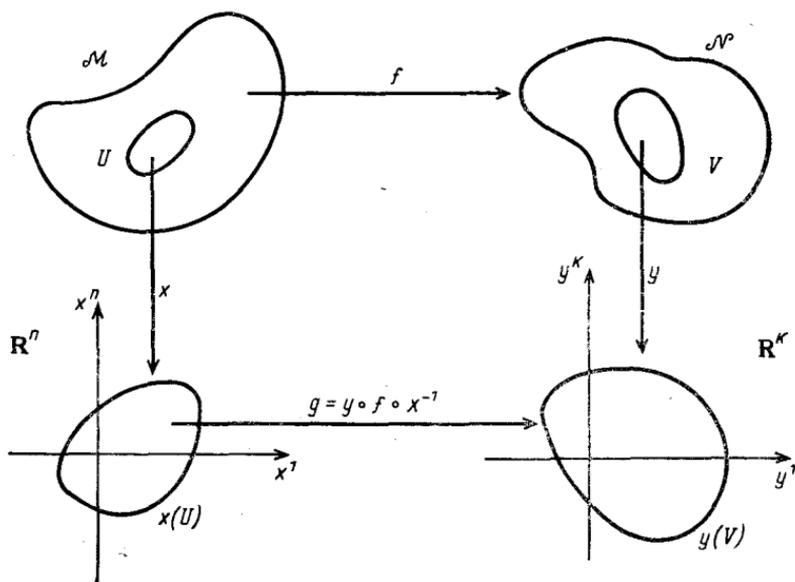


Рис. 26. Описание гладкого отображения в локальных координатах

* Пусть $(\tilde{U}, \tilde{x}), p \in \tilde{U}$, и $(\tilde{V}, \tilde{y}), q = f(p) \in \tilde{V}$, — две другие локальные карты. Отображение

$$\tilde{g} = \tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1}$$

также является бесконечно дифференцируемым. В самом деле, в области $(\tilde{x} \circ x^{-1})(\tilde{U} \cap U)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1} = (\tilde{y} \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \tilde{x}^{-1}) = \\ &= (\tilde{y}' \circ y^{-1}) \circ g \circ (x \circ \tilde{x}^{-1}). \end{aligned}$$

Отображения

$$\tilde{y} \circ y^{-1} : y(V \cap \tilde{V}) \rightarrow \tilde{y}(V \cap \tilde{V})$$

$$\bigcap_{\mathbb{R}^k} \qquad \qquad \bigcap_{\mathbb{R}^k}$$

и

$$x \circ \tilde{x}^{-1} : \tilde{x}(U \cap \tilde{U}) \rightarrow x(U \cap \tilde{U})$$

$$\bigcap_{\mathbb{R}^n} \qquad \qquad \bigcap_{\mathbb{R}^n}$$

бесконечно дифференцируемы по условию, наложенному на многообразия \mathcal{M} и \mathcal{N} , отображение \tilde{g} принадлежит классу C^∞ по определению.

Тем самым отображение \tilde{g} как композиция бесконечно дифференцируемых отображений является бесконечно дифференцируемым. *

Отображение f называется *гладким*, если оно гладкое в каждой точке p многообразия M (рис. 27).

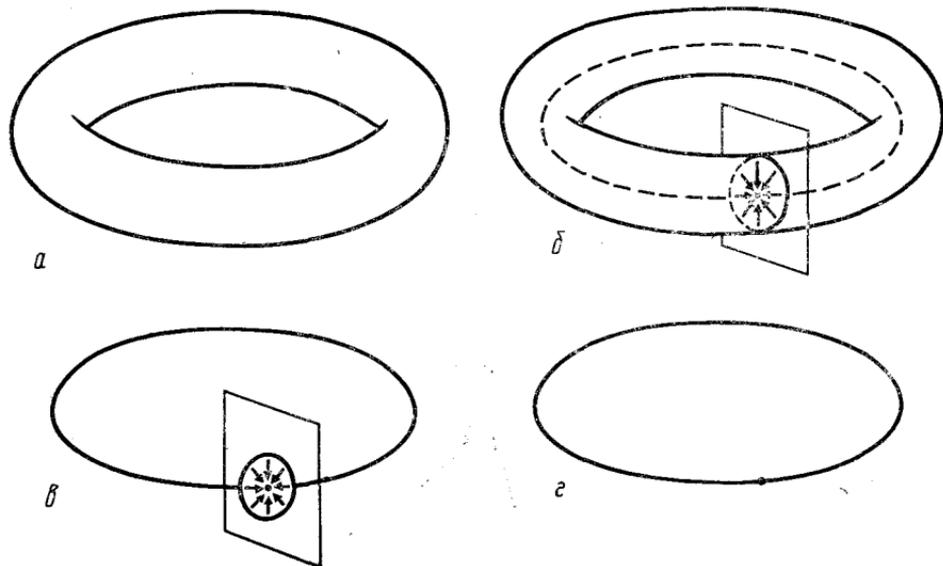


Рис. 27. Проектирование тора T^2 на окружность S^1 — гладкое отображение

Запишем последнее равенство в локальных координатах. Имеем

$$\tilde{g} \quad \tilde{y}^i = \tilde{y}^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) \quad (i=1, \dots, k).$$

Продифференцируем \tilde{y}^i по \tilde{x}^m , заметив, что

$$\tilde{y} \circ y^{-1} \quad \tilde{y}^i = \tilde{y}^i(y^1, \dots, y^k) \quad (i=1, \dots, k);$$

$$g \quad y^j = y^j(x^1, \dots, x^n) \quad (j=1, \dots, n);$$

$$x \circ \tilde{x}^{-1} \quad x^l = x^l(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) \quad (l=1, \dots, n).$$

По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial \tilde{x}^m} = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^m} \quad (i=1, \dots, k; m=1, \dots, n),$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{y}^1}{\partial \tilde{x}^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{y}^1}{\partial \tilde{x}^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \tilde{y}^k}{\partial \tilde{x}^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{y}^k}{\partial \tilde{x}^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{y}^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{y}^1}{\partial y^k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \tilde{y}^k}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{y}^k}{\partial y^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^k}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n} \end{pmatrix}.$$

Из последнего равенства в силу невырожденности матриц Якоби $\left(\frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial y^j}\right)$ и $\left(\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^m}\right)$ вытекает, что

$$\text{rang} \left(\frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial \tilde{x}^m} \right) = \text{rang} \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^l} \right).$$

Множество гладких отображений вида $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ будем обозначать через $C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Пусть \mathcal{M} и \mathcal{N} — гладкие многообразия.

Гладкое отображение $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ называется *диффеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ также является гладким.

Многообразие \mathcal{M} называется *диффеоморфным* многообразию \mathcal{N} , если существует диффеоморфизм $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ (рис. 28).

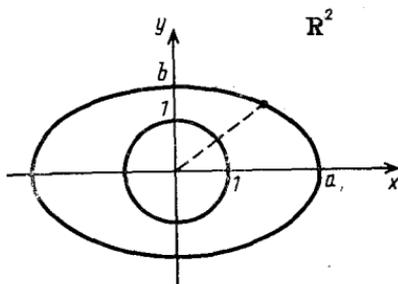


Рис. 28. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ и открытый круг $x^2 + y^2 < 1$ диффеоморфны

Обозначение: $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

ТЕОРЕМА 3. Диффеоморфные многообразия имеют одинаковую размерность.

Справедливость сформулированного утверждения вытекает из рассмотрений следующего пункта (см. конец пункта 2°).

2°. Дифференциал гладкого отображения

Пусть \mathcal{M} и \mathcal{N} — гладкие многообразия и $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ — гладкое отображение. Пусть далее p — точка из \mathcal{M} и $q = f(p)$ — соответствующая ей по отображению точка из \mathcal{N} .

Рассмотрим касательные пространства $T_p \mathcal{M}$ и $T_q \mathcal{N}$. Поставим каждому касательному вектору $X_p \in T_p \mathcal{M}$ в соответствие касательный вектор $Y_q \in T_q \mathcal{N}$ по следующему правилу:

$$Y_q(g) = X_p(g \circ f), \quad (1)$$

где $g \in C^\infty(q)$ — произвольная гладкая функция.

Покажем, что Y_q , определяемый соотношением (1), действительно является касательным вектором из $T_q\mathcal{N}$.

Пусть $g, h \in C^\infty(q)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Тогда

1. $Y_q(g+h) = X_p((g+h) \circ f) = X_p(g \circ f + h \circ f) = X_p(g \circ f) + X_p(h \circ f) = Y_q(g) + Y_q(h)$.
2. $Y_q(\alpha g) = X_p((\alpha g) \circ f) = X_p(\alpha(g \circ f)) = \alpha X_p(g \circ f) = \alpha Y_q(g)$.
3. $Y_q(g \cdot h) = X_p((g \cdot h) \circ f) = X_p((g \circ f) \cdot (h \circ f)) = X_p(g \circ f) \cdot (h \circ f)(p) + (g \circ f)(p) \cdot X_p(h \circ f) = Y_q(g) \cdot h(q) + g(q) \cdot Y_q(h)$. *

Тем самым построено отображение касательного пространства $T_p\mathcal{M}$ в касательное пространство $T_q\mathcal{N}$:

$$(df)_p = f_{*p} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_q\mathcal{N},$$

$$f_{*p} : X_p \mapsto Y_q.$$

Это отображение называется *дифференциалом отображения f* , или *касательным отображением* (рис. 29)

$$(f_{*p} X_p)(g) = X_p(g \circ f).$$

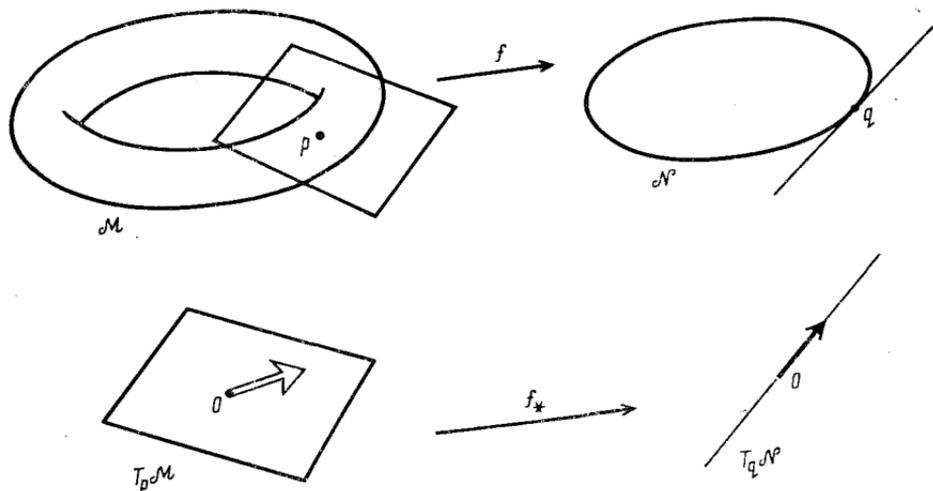


Рис. 29. Касательное отображение

Свойства касательного отображения.

1+. Касательное отображение линейно.

Пусть $X_p, Y_p \in T_p\mathcal{M}$, $g \in C^\infty(q)$, $q = f(p)$.

Из определения суммы касательных векторов вытекает, что

$$\begin{aligned} (f_{*p}(X_p + Y_p))(g) &= (X_p + Y_p)(g \circ f) = X_p(g \circ f) + Y_p(g \circ f) = \\ &= f_{*p} X_p(g) + f_{*p} Y_p(g) = (f_{*p} X_p + f_{*p} Y_p)(g) \end{aligned}$$

Тем самым

$$f_{*p}(X_p + Y_p) = f_{*p}X_p + f_{*p}Y_p.$$

Аналогично доказывается, что

$$f_{*p}(\alpha X_p) = \alpha f_{*p}X_p \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \quad *$$

2+. Пусть (U, x) , $p \in U$, и (V, y) , $q \in V$, — локальные карты многообразий \mathcal{M} и \mathcal{N} соответственно и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_q$$

— базисы касательных пространств $T_p\mathcal{M}$ и $T_q\mathcal{N}$.

В локальных координатах отображение $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ описывается набором функций

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^k = y^k(x^1, \dots, x^n).$$

Если касательный вектор $X_p \in T_p\mathcal{M}$ имеет координаты ξ^1, \dots, ξ^n , а касательный вектор $Y_q \in T_q\mathcal{N}$, соответствующий ему, — координаты η^1, \dots, η^k , то соотношение (1) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^k}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}. \quad *$$

3+. Пусть $1_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — тождественное отображение. Тогда касательное отображение

$$(1_{\mathcal{M}})_{*p} = 1_{T_p\mathcal{M}}: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$$

также является тождественным.

* Имеем

$$((1_{\mathcal{M}})_{*p} X_p) f = X_p(f \circ 1_{\mathcal{M}}) = X_p f = (1_{T_p\mathcal{M}} X_p) f. \quad *$$

4+. Пусть \mathcal{M} , \mathcal{N} и \mathcal{Q} — гладкие многообразия, $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ и $g: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{Q}$ — гладкие отображения, $p \in \mathcal{M}$, $q = f(p) \in \mathcal{N}$, $r = g(q) \in \mathcal{Q}$. Тогда

$$(g \circ f)_{*p} = g_{*q} \circ f_{*p}.$$

* Пусть $h \in C^\infty(r)$. Из определения касательного отображения вытекает, что для любого X_p из $T_p\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} ((g \circ f)_{*p} X_p) h &= X_p(h \circ (g \circ f)) = X_p((h \circ g) \circ f) = \\ &= (f_{*p} X_p)(h \circ g) = (g_{*q} \circ f_{*p}) X_p h. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности h получаем требуемое. *

5+. Пусть $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ — диффеоморфизм.

Тогда

$$f_{*p}: T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)} \mathcal{N}$$

— изоморфизм касательных пространств и

$$(f_{*p})^{-1} = (f^{-1})_{*f(p)}.$$

* Пользуясь свойствами 3+ и 4+, получаем, что

$$f_{*p} (f^{-1})_{*f(p)} = (f \circ f^{-1})_{*f(p)} = (1_{\mathcal{N}})_{*f(p)} = 1_{T_{f(p)} \mathcal{N}},$$

$$(f^{-1})_{*f(p)} \circ f_{*p} = (f^{-1} \circ f)_{*p} = (1_{\mathcal{M}})_{*p} = 1_{T_p \mathcal{M}}. *$$

Так как размерность гладкого многообразия \mathcal{M} совпадает с размерностью касательного пространства $T_p \mathcal{M}$, то из свойства 5+ вытекает, что размерности диффеоморфных пространств равны.

3°. Ранг гладкого отображения

Определение. Рангом гладкого отображения $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ в точке $p \in \mathcal{M}$ называется размерность образа касательного пространства $T_p \mathcal{M}$ при касательном отображении f_{*p} :

$$\text{rang}_p f = \dim f_{*p} (T_p \mathcal{M}).$$

Из курса линейной алгебры известно, что размерность образа линейного пространства при линейном отображении равна рангу матрицы этого отображения.

Тем самым

$$\text{rang}_p f = \text{rang} \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_{x(p)}.$$

Пример. Ранг проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемой по правилу

$$\pi: (p^1, p^2, p^3) \mapsto (p^1, p^2),$$

равен

$$\text{rang } \pi = \begin{cases} 2, & \text{если } p^3 \neq 0, \\ 1, & \text{если } p^3 = 0. \end{cases}$$

Пусть $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ — гладкое отображение и p — точка из \mathcal{M} .

Если

$$\text{rang}_p f = r,$$

то существует окрестность U точки p , такая, что для любой точки q из U выполняется неравенство

$$\text{rang}_q f \geq r.$$

Если $\text{rang}_q f = \text{rang}_p f$ для любой точки q из U , то говорят, что гладкое отображение f имеет в окрестности U *постоянный ранг*.

ТЕОРЕМА 4. Пусть гладкое отображение $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ имеет в окрестности точки p многообразия \mathcal{M} постоянный ранг r . Тогда существуют локальные карты (U, x) , $p \in U$, и (V, y) , $q = f(p) \in V$, в которых отображение f допускает представление вида

$$y \circ f \circ x^{-1}: \underbrace{(x^1, \dots, x^n)}_{\mathbb{R}^n} \mapsto \underbrace{(y^1, \dots, y^r, 0, \dots, 0)}_{\mathbb{R}^k}$$

* Выберем локальные координаты (U, x) и (V, y) так, чтобы $x(p) = 0$, $y(q) = 0$.

В этих координатах отображение f записывается как (рис. 30)

$$g = y \circ f \circ x^{-1},$$

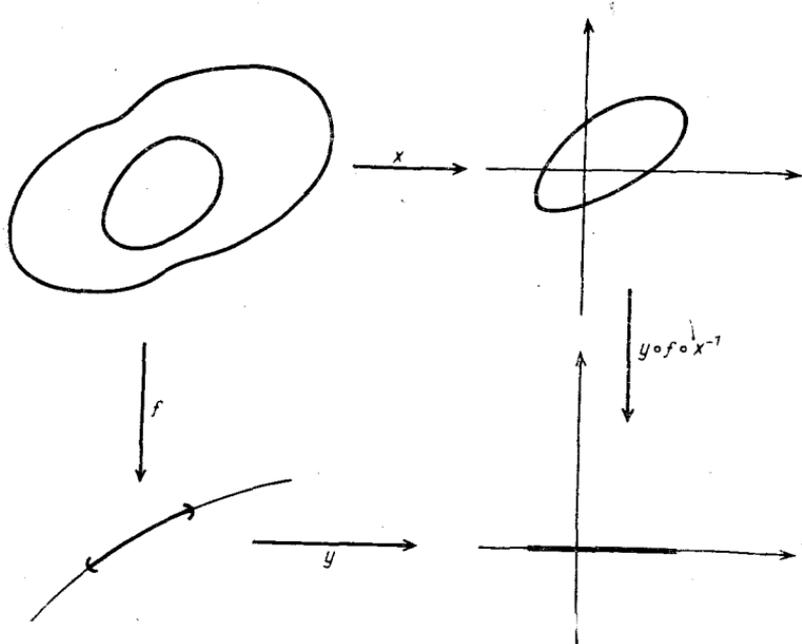


Рис. 30. Гладкое отображение ранга 1

или, подробнее,

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i = 1, \dots, k)$$

По условию можно считать, что всюду в U

$$\text{rang } f = r,$$

т. е. в окрестности $x(U)$ точки O матрица Якоби

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$$

содержит ненулевой минор порядка r .

Перенумерацией координат x^j, y^i всегда можно добиться того, чтобы

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^r}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^r}{\partial x^r} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим отображение φ некоторой окрестности точки $O \in \mathbb{R}^n$ в пространство \mathbb{R}^n , определяемое по правилу

$$\varphi : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^r, x^{r+1}, \dots, x^n),$$

или, подробнее,

$$u^i = y^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i = 1, \dots, r),$$

$$u^i = x^i \quad (i = r+1, \dots, n).$$

Матрица Якоби этого отображения

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^r} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{\partial y^r}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^r}{\partial x^r} & * \\ \hline 0 & & & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \end{array} \right)$$

не вырождена. По теореме о неявной функции можно указать окрестность точки O , в которой отображение φ является обратимым. Отображение $h = g \circ \varphi^{-1}$ имеет вид

$$y^i = u^i \quad (i = 1, \dots, r),$$

$$y^i = \tilde{y}^i(u^1, \dots, u^n) \quad (i = r+1, \dots, k)$$

и

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & & 1 & \\ \hline & & & 0 \\ \hline * & \frac{\partial \tilde{y}^{r+1}}{\partial u^{r+1}} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}^{r+1}}{\partial u^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{y}^k}{\partial u^{r+1}} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}^k}{\partial u^n} & \end{array} \right)$$

Локальная карта (U, x) , $p \in U$, многообразия \mathcal{M} называется *адаптированной (приспособленной)* для \mathcal{N} , если найдется k , $1 \leq k \leq n$, такое, что

$$x(U \cap \mathcal{N}^c) = x(U) \cap \mathbb{R}^k,$$

где $\mathbb{R}^k = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^{k+1} = \dots = x^n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$.

Если в каждой точке подмножества \mathcal{N} существует локальная карта, адаптированная для \mathcal{N} , и число k не зависит от выбора этой точки, то \mathcal{N} называется *k -мерным гладким подмногообразием* гладкого многообразия \mathcal{M} . Подмногообразие \mathcal{N} является k -мерным гладким многообразием (рис. 31).

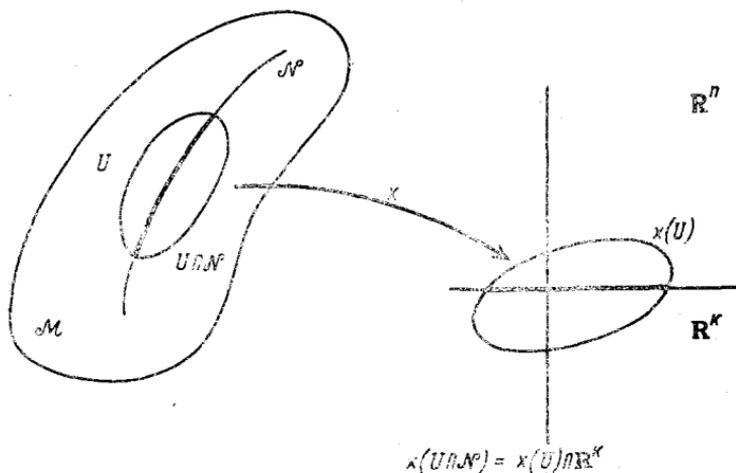


Рис. 31. Адаптированная карта

Пример 1. Подпространство $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ координатного пространства \mathbb{R}^n является его гладким подмногообразием: для всякого множества V , открытого в \mathbb{R}^k , найдется открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$, такое, что $V = U \cap \mathbb{R}^k$.

Пример 2. Если в определении адаптированной карты положить $k=n$, то получим, что всякое открытое подмножество гладкого многообразия является его гладким подмногообразием.

Пример 3. Параболоид вращения \mathcal{P}

$$z = x^2 + y^2.$$

— гладкое подмногообразие пространства \mathbb{R}^3 .

* Пусть

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - \varepsilon < z < x^2 + y^2 + \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$.

Введем отображение

$$\varphi: U \rightarrow \Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\varepsilon < z < \varepsilon\},$$

действующее по правилу

$$\varphi: \underset{U}{\mathbb{M}}(x, y, z) \mapsto (x, y, z - x^2 - y^2). \underset{\Pi}{\mathbb{M}}$$

Тогда карта (U, φ) будет адаптированной для \mathcal{P} (рис. 32):

$$\varphi(U \cap \mathcal{P}) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2. *$$

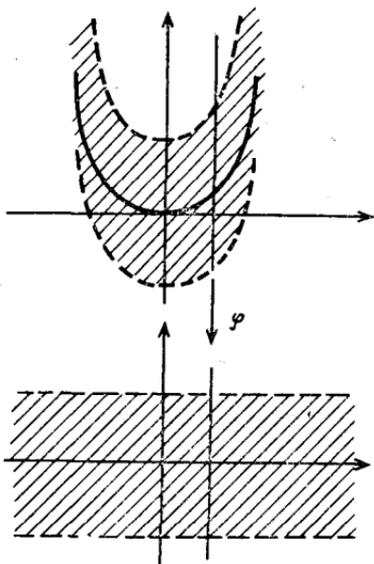


Рис. 32. Парабола — гладкое подмногообразие плоскости

2°. Задание многообразий уравнениями

Укажем один часто встречающийся способ задания гладкого многообразия.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ — гладкое отображение и $q \in \mathcal{N}$ — такая точка, что ее полный прообраз

$$f^{-1}(q) = \{p \in \mathcal{M} \mid f(p) = q\}$$

не пуст и $\text{rang } f = r$ в каждой точке $p \in f^{-1}(q)$.

Тогда $f^{-1}(q)$ является гладким подмногообразием многообразия \mathcal{M} ; его размерность равна $n - r = \dim \mathcal{M} - \text{rang } f$.

* Пусть p — произвольная точка из $f^{-1}(q)$.

Выберем в \mathcal{M} и \mathcal{N} локальные карты (U, x) и (V, y) так, чтобы

$$x(p) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad y(q) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k.$$

Согласно теореме можно считать, что в этих локальных координатах отображение f можно выразить формулой

$$(x^1, \dots, x^r, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^r, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-r}).$$

Перенумеруем координаты в пространстве \mathbf{R}^n :

$$(x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^n) \mapsto (x^{n-r+1}, \dots, x^n, x^1, \dots, x^{n-r}).$$

Тогда отображение f в окрестности точки p будет описываться формулой

$$(x^1, \dots, x^r, \dots, x^n) \mapsto (x^{n-r+1}, \dots, x^n, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-r}).$$

Отсюда получаем: множество $f^{-1}(q)$ локально можно задать системой уравнений

$$x^{n-r+1} = 0, \dots, x^n = 0.$$

Следовательно, $f^{-1}(q)$ — гладкое подмногообразие размерности $n-r$. *

Пример 1. Рассмотрим функцию $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, определяемую формулой

$$f(x, y, z) = z - x^2 - y^2.$$

Полный прообраз

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) | z - x^2 - y^2 = 0\}$$

непуст и

$$\text{rang } f = \text{rang}(-2x, -2y, 1) = 1$$

в каждой его точке.

Тем самым $z = x^2 + y^2$ — двумерное подмногообразие пространства \mathbf{R}^3 . *

Вообще регулярная линия (поверхность) второго порядка является одно- (дву-) мерным подмногообразием плоскости (трехмерного пространства).

На практике наиболее часто встречаются подмногообразия координатного пространства \mathbf{R}^n . При помощи доказанной теоремы их можно задавать как поверхности уровня функции n переменных или как пересечения таких поверхностей.

Пример 2. Пусть $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкая функция и

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) \neq 0$$

во всех точках $f^{-1}(q)$.

Тогда, если множество

$$f^{-1}(x^1, \dots, x^n) = q$$

непусто, то оно представляет собой $(n-1)$ -мерное гладкое многообразие (*гиперповерхность* пространства \mathbf{R}^n). *

Пример 3. Пусть

$$f^1(x^1, x^2) = x^1^2 + x^2^2, \quad f^2(x^3, x^4) = x^3^2 + x^4^2.$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x^1{}^2 + x^2{}^2 = 1, \\ x^3{}^2 + x^4{}^2 = 1. \end{cases}$$

Вследствие того, что

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x^3 & 2x^4 \end{pmatrix} = 2,$$

эта система описывает двумерное многообразие в пространстве \mathbf{R}^4 (тор Клиффорда). *

Вообще пусть f^1, \dots, f^m ($m < n$) — функции n переменных, c^1, \dots, c^m — некоторые постоянные. Если множество решений \mathcal{M} системы

$$f^1(x^1, \dots, x^n) = c^1, \dots, f^m(x^1, \dots, x^n) = c^m$$

непусто и

$$\text{rang} \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) = m$$

в каждой точке из \mathcal{M} , то \mathcal{M} — $(n-m)$ -мерное гладкое подмногообразие пространства \mathbf{R}^n .

§ 6. ВЕКТОРНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

1°. Определение тензорного поля

Пусть \mathcal{M} — n -мерное гладкое многообразие.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что на \mathcal{M} задано *тензорное поле T типа $\binom{r}{s}$* , если в каждой точке p многообразия для любой локальной карты (U, x) , $p \in U$, указан упорядоченный набор n^{r+s} чисел

$$T_{i_1 \dots i_s}^{i_1 \dots i_r} \left(\begin{matrix} 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n \\ 1 \leq j_1 \leq n, \dots, 1 \leq j_s \leq n \end{matrix} \right),$$

который при переходе к другой координатной карте (V, y) , $p \in V$, преобразуется по правилу

$$T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} = T_{i_1 \dots i_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}. \quad (1)$$

Можно сказать и по-иному.

Тензорным полем T типа $\binom{r}{s}$ на гладком многообразии \mathcal{M} называется правило, которое с каждой точкой p многообразия \mathcal{M} связывает тензор типа $\binom{r}{s}$, заданный в касательном пространстве $T_p \mathcal{M}$.

Формула (1) представляет собой запись этого закона в локальных координатах.

Тензорное поле T , компоненты $T_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$ которого принадлежат классу $C^\infty(p)$ для любой точки p из \mathcal{M} , называется *гладким тензорным полем* на многообразии \mathcal{M} .

Совокупность всех гладких тензорных полей на многообразии \mathcal{M} типа $\binom{r}{s}$ будем обозначать через $\mathcal{D}_s^r(\mathcal{M})$.

Элементы множества $\mathcal{D}^1(\mathcal{M}) = \mathcal{D}_0^1(\mathcal{M})$ называются *векторными полями* (рис. 33).

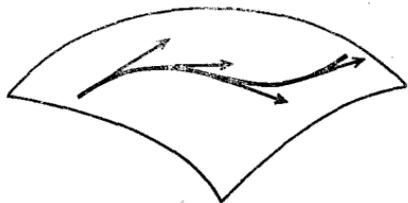


Рис. 33. Векторное поле

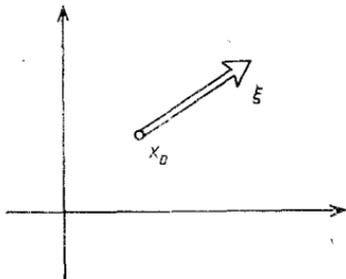


Рис. 34. ξ — вектор смещения

Пусть $X \in \mathcal{D}^1(\mathcal{M})$ — векторное поле на \mathcal{M} и X_p — его значение в некоторой точке p из \mathcal{M} . В локальных координатах (U, x) вектор X_p задается набором n чисел ξ^1, \dots, ξ^n , который при переходе к другим локальным координатам (V, y) в соответствии с правилом (1) преобразуется так:

$${}^y \xi^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^m} \xi^m, \text{ или } \xi^m = \frac{\partial x^m}{\partial y^k} {}^y \xi^k. \quad (2)$$

З а м е ч а н и е. Сравнивая формулу (2) с правилом (4) пункта 2° § 3, замечаем наличие тесной связи между касательным вектором X_p как линейным отображением $f \in C^\infty(p) \mapsto X_p f \in \mathbf{R}$ и вектором X_p как сужением векторного поля X в точку p .

2°. Риманова метрика

Задать на гладком многообразии \mathcal{M} *риманову метрику* — это значит задать на многообразии \mathcal{M} гладкое тензорное поле (g_{ij}) типа $\binom{0}{2}$, обладающее следующими свойствами:

- 1) поле (g_{ij}) симметрично, $g_{ij} = g_{ji}$;
- 2) поле (g_{ij}) положительно определено.

Покажем, что на всяком гладком многообразии такая метрика всегда существует.

* Пусть \mathfrak{A} — атлас многообразия \mathcal{M} , $(U_{(\alpha)}, x_{(\alpha)})$ — карта из \mathfrak{A} и

$$x_{(\alpha)} : \underbrace{(p^1, \dots, p^n)}_{U_{(\alpha)}} \mapsto \underbrace{(x_{(\alpha)}^1(p), \dots, x_{(\alpha)}^n(p))}_{\mathbf{R}^n}$$

— соответствующее координатное отображение.

В пространстве \mathbf{R}^n в координатах $(x_{(\alpha)}^1, \dots, x_{(\alpha)}^n)$ задаем какую-нибудь метрику, например каноническую:

$$g_{ij}^{(\alpha)} = \delta_{ij}.$$

Пусть $\{\varphi_{(\alpha)}\}$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_{(\alpha)}\}$. Положим

$$g_{ij} = \sum_{\alpha} \varphi_{(\alpha)} g_{ij}^{(\alpha)}.$$

Тензорное поле (g_{ij}) является гладким, симметричным и положительно определенным. *

3°. Внешние дифференциальные формы на многообразии

Пусть

$$z = f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$$

— гладкая функция, заданная в пространстве \mathbf{R}^n , x_0 — точка из \mathbf{R}^n .

Из курса математического анализа известно, что дифференциал $f(x)$ в точке x_0 есть линейная функция векторов смещения от этой точки.

Пусть $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ — вектор смещения. Тогда

$$df_{x_0}(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) \xi^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \xi^n. \quad (1)$$

Сами координаты x^1, \dots, x^n точки x из \mathbf{R}^n можно рассматривать как гладкие функции. Поэтому в каждой точке пространства \mathbf{R}^n определены дифференциалы dx^1, \dots, dx^n этих функций:

$$\begin{aligned} dx^i(\xi) &= \frac{\partial x^i}{\partial x^1} \xi^1 + \dots + \frac{\partial x^i}{\partial x^i} \xi^i + \dots + \frac{\partial x^i}{\partial x^n} \xi^n = \\ &= 0 \cdot \xi^1 + \dots + 1 \cdot \xi^i + \dots + 0 \cdot \xi^n = \xi^i \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Тем самым

$$dx^1, \dots, dx^n$$

— линейные формы (рис. 34).

Линейной формой будет и любая их комбинация $\sum_{i=1}^n \lambda^i dx^i$.

Записывая формулу (1) несколько по-иному:

$$df_{x_0}(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) dx^1(\xi) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) dx^n(\xi),$$

или

$$df_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) dx^n,$$

замечаем, что в линейном пространстве $\Omega_{x_0}^{(1)}$ линейных форм в точке x_0 формы dx^1, \dots, dx^n образуют базис.

Внешнее произведение форм $dx^{i_1}, \dots, dx^{i_k}$ описывается следующей формулой:

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_1^{i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_k^{i_1} & \dots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Внешней дифференциальной k -формой ω назовем выражение вида

$$\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

где $(\omega_{i_1 \dots i_k})$ — кососимметричное тензорное поле типа $\binom{0}{k}$.

Пример 1. Внешняя дифференциальная 2-форма в пространстве \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\omega_{23} dx^2 \wedge dx^3 + \omega_{31} dx^3 \wedge dx^1 + \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2. *$$

Внешним дифференциалом от внешней дифференциальной k -формы ω называется внешняя $(k+1)$ -форма $d\omega$, определяемая по правилу

$$d\omega(x) = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i}(x) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Пример 2. Внешний дифференциал от линейной формы

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3$$

равен

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 + \\ + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^3 = \\
& = \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \\
& \quad + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned}$$

Внешний дифференциал 2-формы из предыдущего примера равен

$$\left(\frac{\partial \omega_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. *$$

Пусть \mathcal{M} — n -мерное гладкое многообразие. Зафиксируем точку $p \in \mathcal{M}$.

Полилинейная кососимметричная функция φ от k касательных векторов X_1, \dots, X_k из касательного пространства $T_p \mathcal{M}$ называется *внешней формой степени k* .

Если векторы X_1, \dots, X_k линейно зависимы, то вследствие полилинейности и кососимметричности имеем

$$\varphi(X_1, \dots, X_k) = 0.$$

В частности, не существует ненулевой внешней формы степени выше $n = \dim \mathcal{M}$.

Совокупность внешних форм степени k в точке p многообразия \mathcal{M} образует линейное пространство $\Omega_p^{(k)}(\mathcal{M})$. Оно конечномерно.

Введем операцию внешнего умножения внешних форм при помощи равенства

$$\begin{aligned}
& (\varphi \wedge \psi)(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_l) = \\
& = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & k+l \\ i_1 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_{k+l} \end{pmatrix} \times \\
& \quad \times \varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \psi(X_{i_{k+1}}, \dots, X_{i_{k+l}}).
\end{aligned}$$

Из определения вытекает, что

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \varphi.$$

Пусть (U, x) , $p \in U$, — локальная карта и

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

— соответствующий базис касательного пространства $T_p \mathcal{M}$ (заданный в этой карте единичными векторами пространства \mathbb{R}^n , направленными по координатным осям).

Обозначим через dx^i форму 1-й степени, определяемую равенством

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}.$$

Формы

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

образуют базис пространства $\Omega_p^{(k)}(\mathcal{M})$.

Пусть $(T_{i_1 \dots i_k})$ — произвольное кососимметричное тензорное поле типа $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$. Тогда выражение

$$T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$$

инвариантно относительно замены координат $(x) \rightarrow (y)$.

* В самом деле, из равенств

$$T_{j_1 \dots j_k} = T_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}},$$

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$$

получаем

$$T_{j_1 \dots j_k} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k} = T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. *$$

В частности, внешняя дифференциальная форма степени n в координатах (x) имеет вид:

$$f(x_1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

а в координатах (y) :

$$f(x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)) \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Пусть

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

— внешняя дифференциальная форма степени $k < n$.

Внешняя форма

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^t} dx^t \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

степени $k+1$ называется *внешним дифференциалом* формы ω .

1°. Ориентация многообразия

Пусть \mathcal{M} — гладкое многообразие.

Определение. Карты (U, x) и (V, y) многообразия \mathcal{M} называются *согласованными*, если якобиан координатного преобразования

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

положителен —

$$\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) > 0.$$

Атлас многообразия называется *ориентированным*, если любые две его карты согласованы.

Многообразие называется *ориентируемым*, если у него есть ориентируемый атлас.

ТЕОРЕМА 6. Если связное многообразие ориентируемо, то оно допускает ровно две ориентации (рис. 35).

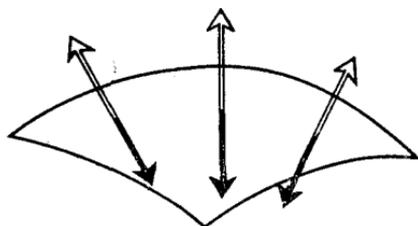


Рис. 35. Ориентируемое многообразие допускает ровно две ориентации

Выбор одной из ориентаций делает многообразие *ориентированным*.

Примером ориентируемого многообразия может служить сфера S^2 . Атлас из карт $(S^2 \setminus N, \pi_N)$ и $(S^2 \setminus S, -\pi_S)$ ориентирован: якобиан координатного преобразования

$$y^1 = \frac{x^1}{x^1 + x^2}, \quad y^2 = -\frac{x^2}{x^1 + x^2}$$

положителен —

$$\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{(x^1 + x^2)^2} > 0.$$

Примером неориентируемого многообразия является, например, лист Мебиуса.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если многообразие ориентируемо, то любой его атлас можно сделать ориентированным.

2°. Многообразие с краем

Чтобы определить *многообразие с краем*, достаточно дословно воспроизвести определение обычного многообразия, заменяя координатное пространство \mathbf{R}^n замкнутым полупространством

$$\mathbf{R}_+^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n \mid x^n \geq 0\}.$$

Гладкая структура на многообразии с краем определяется так же, как и на обычном многообразии. Следует лишь уточнить понятие гладкости отображения на полупространстве \mathbf{R}_+^n .

Пусть $f: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция и $x_0 \in \mathbf{R}_+^n$. Если $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ — внутренняя точка полупространства \mathbf{R}_+^n , $x_0^n > 0$, то сохраняется обычное определение производной. Если же $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, 0)$, то $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ определим так:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, 0) = \\ & = \lim_{x^i \rightarrow x_0^i} \frac{f(x_0^1, \dots, x^i, \dots, x_0^{n-1}, 0) - f(x_0^1, \dots, x_0^i, \dots, x_0^{n-1}, 0)}{x^i - x_0^i} \\ & \quad (i = 1, \dots, n-1), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, 0) = \lim_{x^n \rightarrow +0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, x^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, 0)}{x^n}.$$

Если введенные (односторонние) производные непрерывны в полупространстве \mathbf{R}_+^n , то будем говорить, что f — функция класса $C^1(\mathbf{R}_+^n)$. Аналогично определяются классы гладкости $C^2(\mathbf{R}_+^n), \dots, C^\infty(\mathbf{R}_+^n)$.

Отображение

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i = 1, \dots, k)$$

называется *гладким* на полупространстве \mathbf{R}_+^n , если $y^i \in C^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ для любого $i = 1, \dots, k$.

Пусть (U, x) — локальная карта многообразия с краем \mathcal{M} и $p \in U$.

Точка p называется *внутренней точкой* многообразия с краем \mathcal{M} , если $x^n(p) > 0$, и *граничной точкой*, если $x^n(p) = 0$. Такое разбиение не зависит от выбора локальной карты.

Множество граничных точек многообразия с краем называется его *краем*.

Обозначение: $\partial \mathcal{M}$.

Если $\partial \mathcal{M} = \emptyset$, то приходим к прежнему понятию многообразия. Край $\partial \mathcal{M}$ является гладким $(n-1)$ -мерным многообразием.

Достаточно в качестве атласа $\mathfrak{A}(\partial\mathcal{M})$ взять набор карт $(U \cap \partial\mathcal{M}, (x^1, \dots, x^{n-1}))$, где $(U, (x^1, \dots, x^n))$ — карта из $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$: координатный гомеоморфизм отображает $U \cap \partial\mathcal{M}$ на $x(U) \cap \mathbb{R}_0^{n-1}$, а замена координат как ограничение замены координат многообразия \mathcal{M} остается гладкой.

Пример 1. Верхняя полусфера $S_+^2 = S^2 \cap \mathbb{R}_+^3$ — гладкое многообразие с краем. Край $\partial S_+^2 = S^1$ — окружность экватора (рис. 36).

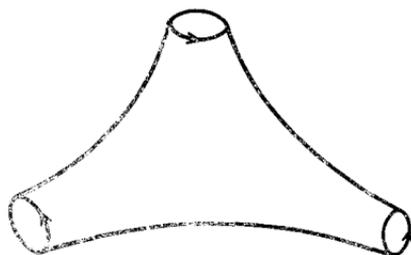
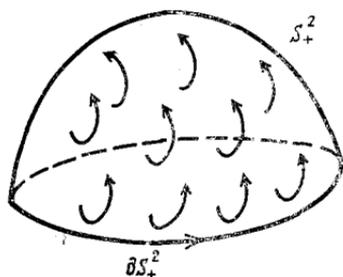


Рис. 36. Ориентация полусферы однозначно определяет ориентацию края

Рис. 37. Пример ориентированного многообразия

Пример 2. Краем замкнутого шара \bar{B}^3 является сфера S^2 .

ТЕОРЕМА 7. Край $\partial\mathcal{M}$ ориентруемого многообразия \mathcal{M} также является ориентруемым многообразием (рис. 37).

* Пусть $\mathfrak{A}(\mathcal{M}) = \{(U, (x^1, \dots, x^{n-1}, x^n))\}$ — ориентированный атлас многообразия \mathcal{M} и $\mathfrak{A}(\partial\mathcal{M}) = \{(U \cap \partial\mathcal{M}, (x^1, \dots, x^{n-1}))\}$ — атлас его края $\partial\mathcal{M}$. Покажем, что атлас $\mathfrak{A}(\partial\mathcal{M})$ является ориентированным (рис. 38).

Пусть $(U, (x^1, \dots, x^{n-1}, x^n))$ и $(V, (y^1, \dots, y^{n-1}, y^n))$ — две карты из атласа $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$ и

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n,$$

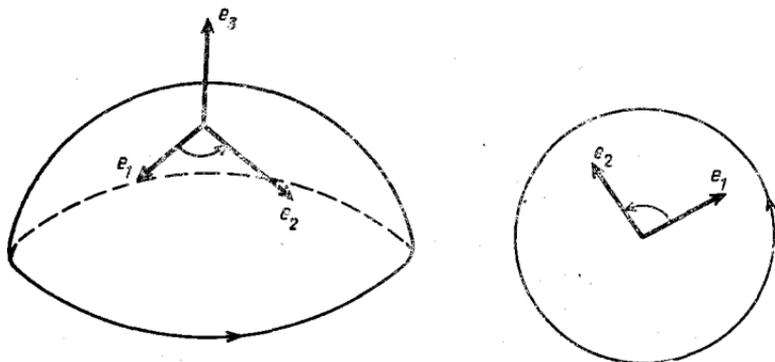


Рис. 38. Ориентация полусферы и ориентация ее граничной окружности.

— соответствующее координатное преобразование. Матрица Якоби этого преобразования имеет вид

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

По определению края многообразия координата $y^n = 0$ в точках пересечения $(U \cap \partial \mathcal{M}) \cap (V \cap \partial \mathcal{M}) = (U \cap V) \cap \partial \mathcal{M}$. Поэтому в этих точках

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^1} = \cdots = \frac{\partial y^n}{\partial x^{n-1}} = 0.$$

Тем самым

$$\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} = \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Из этого соотношения и из того, что $\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right) > 0$, вытекает:

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^n} \neq 0.$$

Но так как в пересечении $U \cap V$ $x^n \geq 0$, $y^n \geq 0$, то

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^n} > 0.$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \end{vmatrix} > 0$$

и, значит, атлас $\mathfrak{A}(\partial \mathcal{M})$ является ориентированным. *

Ориентация края $\partial \mathcal{M}$, задаваемая построенным в теореме атласом, называется ориентацией, согласованной с ориентацией многообразия \mathcal{M} .

3°. Интеграл от дифференциальной формы по гладкому многообразию

Пусть \mathcal{M} — n -мерное гладкое ориентируемое многообразие и φ — внешняя дифференциальная форма на \mathcal{M} степени n .

Будем считать, что форма φ имеет компактный носитель. Это означает, что замыкание множества точек многообразия \mathcal{M} , в которых форма φ отлична от нуля, компактно.

Определим интеграл от формы φ по многообразию \mathcal{M} .

Предположим сначала, что носитель формы φ содержится в области определения U локальной карты (U, x) . Тогда в локальных координатах (x^1, \dots, x^n) форма φ запишется так:

$$\varphi = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

По определению положим

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi = \int_{x(U)} \dots \int_{x(U)}^n f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n.$$

Это определение не зависит от выбора локальной карты в следующем смысле.

Пусть (V, y) — другая локальная карта, такая, что $\text{supp } \varphi \subset V$. Тогда в координатах (y^1, \dots, y^n) форма φ принимает следующий вид:

$$\varphi = f(x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)) \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Согласно правилу замены переменных в кратном интеграле при условии

$$J = \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right) > 0$$

имеем

$$\int_{x(U)} \dots \int_{x(U)} f(x) dx^1 \dots dx^n = \int_{y(V)} \dots \int_{y(V)} f(x(y)) J dy^1 \dots dy^n.$$

Перейдем теперь к общему случаю.

Пусть $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ — ориентированный атлас многообразия \mathcal{M} . Рассмотрим гладкое разбиение единицы $\{\psi_\alpha\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$.

Положим по определению

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi = \int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \right) \varphi = \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} \psi_{\alpha} \varphi$$

(напомним, что $\psi_{\alpha} \equiv 0$ вне U_{α}).

4°. Формула Стокса

Эта формула связывает интеграл по многообразию с интегралом, взятым по его границе. Как частные случаи она включает в себя такие известные формулы классического анализа, как формула Грина, формула Стокса, формула Гаусса — Остроградского.

ТЕОРЕМА 8. Пусть \mathcal{M} — n -мерное ориентированное многообразие с краем $\partial\mathcal{M}$, φ — внешняя дифференциальная форма степени $n-1$ с компактным носителем. Тогда

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \varphi = (-1)^n \int_{\mathcal{M}} d\varphi$$

(ориентация края $\partial\mathcal{M}$ согласована с ориентацией многообразия \mathcal{M}).

* Пусть $\{U_i\}$ — покрытие многообразия \mathcal{M} координатными окрестностями U_i и $\{\psi_i\}$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы. Так как носитель формы φ компактен, то он пересекается лишь с конечным числом N носителей функций ψ_i . Тем самым

$$\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_N,$$

где $\varphi_i = \psi_i \varphi$.

Отсюда следует, что

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \varphi = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\mathcal{M}} \varphi_i, \quad \int_{\mathcal{M}} d\varphi = \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{M}} d\varphi_i.$$

Из последних двух равенств видно, что формулу Стокса достаточно доказать для случая, когда $\text{supp } \varphi$ целиком лежит в координатной окрестности U_i .

Пусть x^1, \dots, x^n — локальные координаты в U_i и

$$\varphi = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n$$

(функции a_j имеют компактные носители). Тогда

$$d\varphi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^j \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Без ограничения общности можно считать, что $x(U_i) = \mathbf{R}_+^n$, т. е. что функции a_j определены в полупространстве \mathbf{R}_+^n (рис. 39).

Так как обе части доказываемого равенства линейны относительно интегрируемых форм, то достаточно рассмотреть форму вида

$$\varphi = (-1)^{j-1} a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

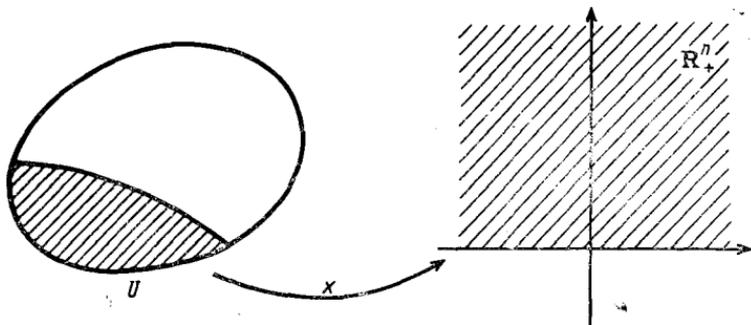


Рис. 39. Координатной окрестности U соответствует открытое полупространство \mathbb{R}_+^n

где $a(x^1, \dots, x^n)$ — функция с компактным носителем, определенная в полупространстве \mathbb{R}_+^n .

Тогда

$$d\varphi = \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^j \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Рассмотрим два случая.

1. $j < n$. Ограничение формы φ на край $\partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_0^{n-1}$ равно нулю вследствие того, что $x^n \equiv 0$ и, значит, $dx^n = 0$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}_0^{n-1}} \varphi = 0.$$

С другой стороны,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} d\varphi = \int_{\mathbb{R}_+^n} \dots \int \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^1 \dots dx^n.$$

Переходя к повторному интегралу, получаем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^j.$$

Так как функция $a(x^1, \dots, x^n)$ имеет в \mathbb{R}_+^n компактный носитель, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^j = a(x^1, \dots, x^j, \dots, x^n) \Big|_{x^j=-\infty}^{x^j=+\infty} = 0.$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} d\varphi = 0.$$

2. $j=n$. Имеем

$$\varphi = (-1)^{n-1} a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

и

$$d\varphi = \frac{\partial a}{\partial x^n} (x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \wedge dx^n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_0^{n-1}} \varphi &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} a(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}, \\ \int_{\mathbb{R}_+^n} d\varphi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial a}{\partial x^n} (x^1, \dots, x^{n-1}, x^n) dx^1 \dots dx^{n-1} dx^n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \dots dx^{n-1} \int_0^{\infty} \frac{\partial a}{\partial x^n} dx^n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \dots dx^{n-1} a(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n) \Big|_{x^n=0}^{x^n=\infty} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} a(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1} = (-1)^n \int_{\mathbb{R}_0^{n-1}} \varphi. \end{aligned}$$

Пример 1. Пусть K — компактное множество на плоскости \mathbb{R}^2 с гладкой границей — кривой ∂K . Если

$$\varphi = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

где P и Q — гладкие функции в некотором открытом множестве U , содержащем K , то

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial K} P dx + Q dy$$

(формула Грина) *.

Пример 2. Пусть M — ориентированная гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 , $K \subset M$ — компактное множество с гладкой границей. Обозначим координаты в пространстве \mathbb{R}^3 через x, y, z . Если

$$\varphi = P dx + Q dy + R dz,$$

* Грин (Green) Джордж (14.7.1793—31.3.1841) — английский математик и физик.

где P, Q, R — гладкие функции переменных x, y, z в окрестности K , то

$$\iint_K \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial K} P dx + Q dy + R dz$$

(формула Стокса*).

Пример 3. Пусть K — компактное подмножество пространства \mathbb{R}^3 , граница ∂K которого — гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 . Если

$$\varphi = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$$

— 2-форма, коэффициенты A, B, C которой — гладкие функции переменных x, y, z в окрестности K , то

$$-\iiint_K \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \\ = \iint_K A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$$

(формула Гаусса — Остроградского**).

СВОДКА ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ, ФОРМУЛ, ФАКТОВ

A. Открытой картой хаусдорфова топологического пространства M называется пара (U, x) , где U — открытое подмножество пространства M , а x — гомеоморфизм подмножества U на открытое подмножество координатного пространства \mathbb{R}^n : каждой точке $p \in U$ ставится в соответствие набор из n чисел, ее *локальных координат*:

$$x : p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p)).$$

Хаусдорфово топологическое пространство M называется *n -мерным топологическим многообразием*, если найдется, конечный или счетный, набор открытых карт (U_α, x_α) , такой, что

1) $x_\alpha(U_\alpha)$ является открытым подмножеством пространства \mathbb{R}^n для любого α ;

2) $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Этот набор карт называется *атласом* топологического многообразия M .

* Стокс (Stokes) Джордж Габриель (13.8.1819—1.2.1903) — английский математик и физик.

** Остроградский Михаил Васильевич (24.9.1801—1.1.1862) — русский математик и механик.

Б. Говорят, что n -мерное топологическое многообразие имеет *гладкую структуру*, если существует атлас многообразия, обладающий следующими двумя свойствами:

1) для любых двух карт (U_α, x_α) и (U_β, x_β) из этого атласа координатное преобразование

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

является гладким (принадлежит классу C^∞);

2) этот атлас максимален.

n -мерное топологическое многообразие, имеющее гладкую структуру, называется *n -мерным гладким многообразием* (многообразием класса C^∞).

Карта (U, x) из атласа гладкого многообразия M называется *локальной картой* на многообразии M , или *локальной системой координат* на M .

В. Функция f , заданная на гладком многообразии M , называется *гладкой* (принадлежащей классу $C^\infty(M)$), если для любой точки $p \in M$ можно указать локальную карту (U, x) , такую, что $p \in U$ и функция $\varphi = f \circ x^{-1}$ имеет на открытом подмножестве $x(U)$ пространства \mathbb{R}^n непрерывные частные производные всех порядков.

Функция f называется *гладкой в точке p* ($f \in C^\infty(p)$), если существует открытая окрестность U точки p , в которой функция f является гладкой.

Г. *Носителем* $\text{supp } f$ гладкой функции f , заданной на гладком многообразии M , называется замыкание множества точек многообразия M , в которых эта функция отлична от нуля.

Д. Пусть M — гладкое многообразие и $\{(U_i, x_i)\}$ — его атлас. Тогда существует *гладкое разбиение единицы*, подчиненное покрытию $\{U_i\}$, т. е. найдется набор гладких функций $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих следующими свойствами:

- 1) $0 \leq \varphi_i \leq 1$;
- 2) $\text{supp } \varphi_i \subset U_i$;
- 3) $\sum_i \varphi_i(p) = 1$.

Е. *Касательным вектором* в точке p гладкого многообразия M называется правило $X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждой функции $f \in C^\infty(p)$ ставит в соответствие число $X_p f$ и подчиняется следующим условиям:

- 1) $X_p(f + g) = X_p f + X_p g$;
- 2) $X_p(\alpha f) = \alpha X_p f$;
- 3) $X_p(f \cdot g) = X_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p g$,

где $f, g \in C^\infty(p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ж. Множество $T_p M$ всех касательных векторов в точке p многообразия M , на котором определены операции сложения $(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f$, и умножения на число, $(\alpha X_p)f = \alpha X_p f$, называется *касательным пространством* гладкого многообразия M в точке p . *Размерность касательного пространства* совпадает с размерностью многообразия M .

3. Отображение f гладкого n -мерного многообразия M в гладкое k -мерное многообразие N называется *гладким* в точке $p \in M$, если существуют локальная карта (U, x) , $p \in U$, многообразия M и локальная карта (V, y) , $q = f(p) \in V$, многообразия N , такие, что отображение

$$g = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

является *гладким* (бесконечно дифференцируемым).

Отображение называется *гладким*, если оно является гладким $f: M \rightarrow N$ в каждой точке многообразия M .

И. Гладкое отображение $f: M \rightarrow N$ называется *диффеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1}: N \rightarrow M$ также является гладким.

К. Многообразию M называется *диффеоморфным* многообразием N , если существует диффеоморфизм $f: M \rightarrow N$. В этом случае $\dim M = \dim N$.

Л. Дифференциалом гладкого отображения f (касательным отображением) в точке $p \in M$ называется отображение

$$f_{*p} : T_p M \rightarrow T_q N, \quad q = f(p),$$

определяемое по правилу $f_{*p} : X_p \in T_p M \rightarrow Y_q \in T_q N$, где $Y_q(g) = X_p(g \circ f)$ и $g \in C^\infty(q)$ — произвольная гладкая функция.

М. Рангом гладкого отображения $f: M \rightarrow N$ в точке $p \in M$ называется размерность образа касательного пространства при касательном отображении $f_{*p} : \text{rang}_p f = \dim f_{*p}(T_p M)$.

Н. Непустое подмножество N n -мерного гладкого многообразия M называется его *k -мерным гладким подмногообразием*, если для каждой точки $p \in N$ существует локальная карта (U, x) , $p \in U$, такая, что $x(U \cap N) = x(U) \cap \mathbb{R}^k$.

О. Пусть $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, полный прообраз точки $q \in N$ — $f^{-1}(q) = \{p \in M \mid f(p) = q\}$ непуст и $\text{rang } f = r$ в каждой точке $p \in f^{-1}(q)$. Тогда $f^{-1}(q)$ является гладким подмногообразием многообразия M , его размерность равна $n - r = \dim M - \text{rang } f$.

П. Тензорным полем T типа $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ на гладком многообразии M называется правило, которое с каждой точкой $p \in M$ связывает тензор типа $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, заданный в касательном пространстве $T_p M$. Тензорное поле T называется *гладким*, если его компоненты $T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}$ принадлежат классу $C^\infty(p)$ для любой точки $p \in M$.

Р. На всяком гладком многообразии можно задать *риманову метрику* — гладкое тензорное поле g типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, компоненты g_{ij} которого симметричны, $g_{ij} = g_{ji}$, и квадратичная форма $g_{ij} dx^i dx^j$ положительно определена.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что график гладкой функции $z=f(x, y)$, заданной на всей плоскости, является гладким многообразием.

Указание: атлас состоит из одной карты.

2. Доказать, что окружность является гладким многообразием.

3. Является ли гладким многообразием плоская замкнутая ломаная?

4. Доказать, что тор является гладким многообразием. Построить атлас тора.

5. Показать, что на сфере нельзя задать атлас, состоящий из одной карты.

6. Вычислить ранг отображения $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (x, 0)$.

Ответ: 1.

7. Доказать, что пространства \mathbf{R}^n и \mathbf{R}^k , $k \neq n$, не диффеоморфны.

8. Доказать, что окружность является гладким подмногообразием плоскости.

9. Доказать, что отображение, которое каждой точке тора ставит в соответствие единичный вектор внешней нормали тора в этой точке, является гладким.

Указание: записать явные формулы для координат вектора.

10. Задать риманову метрику на торе.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Приложения введенных понятий и установленных выше фактов весьма многообразны. Поэтому вполне естественно желание авторов дать какое-то представление об их применениях, рассказать о роли и месте геометрических подходов и методов в решении различных задач. Мы остановимся лишь на некоторых приложениях, не требующих к тому же чрезмерного привлечения дополнительных материалов.

В этой главе приводятся некоторые приложения теории кривых к задачам механики и физики, изучаются геометрические свойства решений разнообразного в своих применениях уравнения синус-Гордона, приводится тензорное описание некоторых алгебраических и дифференциальных операций, дается определенное представление о псевдоевклидовом и псевдоримановом пространствах, рассказывается о некоторых типичных задачах вычислительной геометрии.

§ 1. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1°. Закон движения материальной точки. Скорость и ускорение

Рассмотрим движение материальной точки по некоторой кривой L . Пусть s — длина дуги кривой L , отсчитываемая от точки M_0 (начальное положение материальной точки на кривой L). В качестве параметра разумно выбрать время t , которое отсчитывается от момента t_0 . В этот момент t_0 материальная точка находилась в начальном положении M_0 (рис. 1). Пусть в момент t материальная точка находится в точке M кривой L . Обозначим через $\mathbf{r}(t)$ вектор OM . Тогда закон движения точки M по кривой L можно записать так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1)$$

Если $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты точки M , то векторное соотношение (1) равносильно следующим трем соотношениям:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (2)$$

которые представляют собой параметрические уравнения кривой L .

Скалярная скорость движения точки M по кривой L равна $\frac{ds}{dt}$. Для векторной скорости \mathbf{v} , направленной по касательной к кривой L в точке M , получаем выражение

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'_t = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \mathbf{r}'_s \frac{ds}{dt}. \quad (3)$$

Напомним, что $|\mathbf{r}'_s| = 1$ (см. § 3 главы 1).

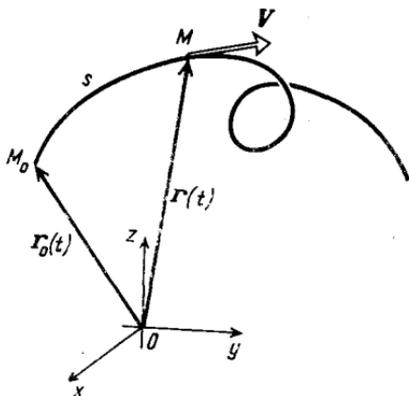


Рис. 1. Кривая как траектория материальной точки

Вектор ускорения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r}''_{tt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

расположен в соприкасающейся плоскости кривой L в точке M (см. § 4 главы 1). Дифференцируя выражения, входящие в соотношение (3) по t , получим для ускорения $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ следующую формулу:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r}''_{tt} = \mathbf{r}''_{ss} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \mathbf{r}'_s \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (4)$$

Придадим соотношению (4) несколько иной вид. Имеем

$$\mathbf{r}''_{ss} = \frac{d\mathbf{r}'_s}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \boldsymbol{\tau}'_s,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной кривой L в точке M . По первой формуле Френе (см. § 5 главы 1)

$$\boldsymbol{\tau}'_s = k_1 \mathbf{n}$$

(здесь k_1 — кривизна кривой L , \mathbf{n} — единичный вектор главной нормали). Это позволяет записать соотношение (4) так:

$$\frac{dv}{dt} = \tau \frac{d^2s}{dt^2} + nk_1 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (5)$$

Формула (5) дает разложение ускорения $\frac{dv}{dt}$ движущейся точки на тангенциальную составляющую $\tau \frac{d^2s}{dt^2}$ (составляющую по касательной) и нормальную составляющую $nk_1 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$ (составляющую по главной нормали).

Отметим, что при равномерном движении по кривой, т. е. при таком движении, когда скалярная скорость $\frac{ds}{dt}$ движения постоянна, вектор $\frac{dv}{dt}$ направлен по главной нормали. Действительно, в этом случае $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ и поэтому из формулы (5) вытекает, что

$$\frac{dv}{dt} = nk_1 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (6)$$

Мы видим, что при равномерном движении ускорение $\frac{dv}{dt}$ направлено по вектору \mathbf{n} , а длина ускорения пропорциональна кривизне k_1 кривой (коэффициент пропорциональности равен квадрату скалярной скорости, которая постоянна).

2°. Движение точки в поле сил

Движение материальной точки может происходить под воздействием внешних сил — поля сил, а также и под воздействием внутренних сил.

Так, например, заряженная частица в магнитном поле движется под воздействием внешних сил. При этом оказывается, что для такого движения

$$\frac{ds}{dt} = c = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = 0.$$

Как мы уже отмечали, в этом случае ускорение $\frac{dv}{dt}$ может быть найдено по формуле (6) и

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = k_1 c^2.$$

Справедливо и обратное утверждение: если под воздействием поля сил точка движется по кривой L так, что ее ускорение в лю-

бой момент времени направлено по главной нормали, то движение происходит с постоянной скалярной скоростью.

Действительно, из формулы (5) следует, что в этом случае

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0,$$

т. е.
$$\frac{ds}{dt} = c = \text{const.}$$

Запишем уравнение движения материальной точки. Наиболее общий случай — когда сила \mathbf{F} , действующая на точку, зависит от расположения точки в пространстве, т. е. от вектора $\mathbf{r}(t)$, от скорости $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ и от времени t .

Таким образом,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F} \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right).$$

Так как согласно закону Ньютона* произведение массы m точки на ускорение $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ равно действующей на точку силе, то векторное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right). \quad (7)$$

3°. Движение точки в параллельном поле сил

В случае, если действующая на точку сила \mathbf{F} параллельна постоянному вектору \mathbf{a} , получаем

$$\mathbf{F} = \lambda \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right) \mathbf{a}. \quad (8)$$

В этом соотношении $\lambda \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right)$ — некоторая скалярная функция, представляющая собой на кривой L — траектории движущейся точки — вполне определенную функцию времени t .

Запишем векторное уравнение движения (7) для рассматриваемого случая. Учитывая формулу (8), получим

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \lambda \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right) \mathbf{a}. \quad (9)$$

Интегрируя равенство (9) по t , найдем

$$m \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_{t=t_0} = \mathbf{a} \int_{t_0}^t \lambda \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right) dt. \quad (10)$$

* Ньютон (Newton) Исаак (4.1.1643—31.3.1727) — английский математик, физик, механик, астроном.

$$\mathbf{v}_0 = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad \varphi(t) = \int_{t_0}^t \lambda \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right) dt,$$

и проводя интегрирование формулы (10), приходим к соотношению

$$m\mathbf{r}(t) - m\mathbf{r}(t_0) - m\mathbf{v}_0 t = \mathbf{a} \int_{t_0}^t \varphi(t) dt. \quad (11)$$

Выражая отсюда $\mathbf{r}(t)$, получаем закон движения точки в параллельном поле сил

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}}{m} \int_{t_0}^t \varphi(t) dt. \quad (12)$$

Из формулы (12) можно сделать следующий вывод: траектория точки, движущейся под воздействием параллельного поля сил, расположена в плоскости, параллельной векторам \mathbf{v}_0 и \mathbf{a} . Эта плоскость проходит через конец вектора $\mathbf{r}(t_0)$.

С физической точки зрения установленный факт очевиден. Двигаясь в параллельном поле сил, точка должна находиться в плоскости, параллельной этому полю сил, — нет воздействий, которые могли бы вывести точку из такой плоскости. Вектор скорости в начальный момент времени равен \mathbf{v}_0 . Поэтому движение должно проходить в плоскости, параллельной векторам \mathbf{v}_0 и \mathbf{a} . Формула (12) дает точную характеристику движения.

4°. Движение точки в центральном поле сил

Пусть поле сил \mathbf{F} имеет вид

$$\mathbf{F} = \lambda \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right) \mathbf{r}, \quad (13)$$

где λ — скалярная функция.

Такое поле сил называется *центральной*. В случае центрального поля сил движение точки происходит так, что в любой момент времени линия действия силы, приложенной к переменной точке, проходит через одну и ту же точку (начало координат).

Найдем некоторые качественные характеристики траектории точки, движущейся под воздействием центрального поля сил.

Согласно правилу (13) закон движения (7) имеет вид

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \lambda \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right) \mathbf{r}.$$

Умножая обе части этого соотношения векторно на \mathbf{r} и учитывая, что $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$, найдем

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{r} \right) = \mathbf{0},$$

или, иначе

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0}. \quad (14)$$

Отсюда вследствие соотношения

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

получаем, что

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{0},$$

т. е.

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{C}. \quad (15)$$

Умножим обе части соотношения (15) скалярно на вектор \mathbf{r} . С учетом равенства $\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right) = 0$ получим

$$(\mathbf{C}, \mathbf{r}) = 0.$$

Таким образом, мы видим, что траектория точки, движущейся под воздействием центрального поля сил, расположена в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{C} .

Итак, любая траектория точки, движущейся под воздействием центрального поля сил, — плоская кривая.

Справедливо следующее утверждение (*теорема Альфана* *): если любая траектория материальной точки, движущейся в постоянном (не зависящим от времени) поле сил, представляет собой плоскую кривую, то это поле сил является центральным.

5°. Движение в поле сил тяготения

Поле сил тяготения имеет вид

$$\mathbf{F} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (16)$$

где μ — постоянная, $r = |\mathbf{r}|$.

Докажем, что под воздействием сил тяготения точка движется по коническому сечению — эллипсу, гиперболу или параболу.

* Альфан (Halphen) Жорж Анри (30.10.1844—21.5.1889) — французский математик.

Уравнение движения для поля (16):

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (17)$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Получим

$$m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) = -\mu \frac{1}{r^3} \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right). \quad (18)$$

В силу очевидных равенств

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2, \quad \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2$$

формула (18) преобразуется к следующей:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = -\frac{\mu}{r^3} \frac{dr^2}{dt} = 2\mu \frac{d}{dt} \frac{1}{r}. \quad (19)$$

Так как поле сил тяготения представляет собой центральное силовое поле $\left(\mathbf{F} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$, то согласно пункту 4° движение материальной точки будет происходить в некоторой плоскости. Выберем координатную систему $Oxyz$ так, чтобы это движение происходило в плоскости $z=0$.

Переходя к полярным координатам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

и замечая, что

$$\mathbf{r} = \{x, y, 0\} = \{\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0\}, \quad r = \rho,$$

вычислим координаты вектора $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Имеем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\{ \frac{d\rho}{dt} \cos \varphi - \rho \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi, \frac{d\rho}{dt} \sin \varphi + \rho \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi, 0 \right\}$$

и поэтому

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Это позволяет переписать соотношение (19) в следующем виде:

$$m \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = 2\mu \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho}.$$

Интегрируя последнее уравнение по t , получим

$$m \left[\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = A + \frac{2\mu}{\rho}, \quad (20)$$

где A — постоянная интегрирования.

В предыдущем пункте, разбирая вопрос о движении точки в центральном поле сил, мы доказали, что

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{C}. \quad (21)$$

Заметим, что при нашем выборе координатной системы вектор \mathbf{C} направлен по оси Oz (движение происходит в плоскости Oxy и, значит, векторы \mathbf{r} и $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ расположены в этой плоскости). Так как

$$\mathbf{r} = \{x, y, 0\}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, 0 \right\},$$

то формулу (21) можно записать так:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C,$$

где $C = |\mathbf{C}|$.

В полярных координатах это соотношение записывается следующим образом:

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C. \quad (22)$$

Выражая отсюда $\frac{d\varphi}{dt}$ и подставляя найденное выражение в равенство (20), получим

$$m \left[\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{\rho^2} \right] = A + \frac{2\mu}{\rho}$$

и далее

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 = \frac{A}{m} + \frac{2\mu}{m} \cdot \frac{1}{\rho} - \frac{C^2}{\rho^2}. \quad (23)$$

Из соотношения (22) находим $\left(\frac{dt}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\rho^4}{C^2}$. Это позволяет переписать формулу (23) в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = - \left(\frac{1}{\rho} + C_1 \right)^2 + C_2,$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные

$$\left(C_1 = - \left(\frac{\mu}{mC} \right)^2, \quad C_2 = \frac{1}{mC^2} \left(A + \frac{\mu}{m} \right) \right).$$

Из последнего соотношения получаем, что

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \sqrt{C_2 - \left(\frac{1}{\rho} + C_1 \right)^2}.$$

Решение этого дифференциального уравнения можно записать так

$$\frac{1}{\rho} = C_3 + \sqrt{C_2} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

(φ_0 — произвольная постоянная, а постоянная C_3 вычисляется по C_1 и C_2 известным образом).

Полученная формула представляет собой полярное уравнение конического сечения с фокусом в полюсе.

6°. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

Рассмотрим движение заряженной частицы массы m с зарядом e в пространстве под воздействием электрического поля \mathbf{E} и магнитного поля \mathbf{H} .

На точку действуют следующие силы: $e\mathbf{E}$ — электрическая сила, $\frac{e}{c} \left(\mathbf{H} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$ — сила, действующая на точку по закону Лоренца* (c — скорость света).

Поэтому векторное уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \left(\mathbf{H} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right). \quad (24)$$

Умножим обе части равенства (24) скалярно на вектор $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ и получим

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = e \left(\mathbf{E}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right).$$

Так как $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ (\mathbf{v} — скорость частицы) и $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = v^2$, то найденное соотношение примет вид

$$\frac{d}{dt} (mv^2) = e(\mathbf{E}, \mathbf{v}).$$

Отсюда следует, что если электрическое поле \mathbf{E} равно нулю, то скалярная скорость частицы v постоянна. В этом случае время t можно заменить параметром, пропорциональным длине дуги s траектории. Действительно, $v = \frac{ds}{dt}$ и если $v = v_0$, то $s = v_0(t - t_0)$, т. е.

$$t = \frac{1}{v_0} s + t_0.$$

Проанализируем теперь случай, когда $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ и магнитное поле \mathbf{H} создается единственным магнитным полюсом. Эту ситуацию можно представить себе так. Пусть имеется магнит со слабой напряженностью \mathbf{H} магнитного поля. Тогда вблизи одного из полю-

* Лоренц (Lorentz) Хендрик Антон (18.7.1853—4.2.1928) — голландский физик и математик.

сов магнита магнитное поле фактически будет создаваться этим близким магнитным полюсом.

Расположим начало координат в этом полюсе. Тогда

$$\mathbf{H} = -k \frac{\mathbf{r}}{\rho^3},$$

где k — постоянная, $\rho = r$.

Предложенное выражение для магнитной напряженности \mathbf{H} естественно: в рассматриваемом случае поле \mathbf{H} будет центральным и его структура будет такой же, как и структура поля тяготения из пункта 5°.

Векторное уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \frac{1}{\rho^3}.$$

Так как

$$t = \frac{1}{v_0} s + t_0, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_0 \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d}{ds} \left(v_0 \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = v_0^2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2},$$

то векторное уравнение движения можно записать в следующей форме:

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \frac{1}{\rho^3}, \quad (25)$$

где $\mu = -\frac{mv_0}{k} = \text{const.}$

Умножим обе части соотношения (25) векторно на \mathbf{r} и, привлекая формулу для двойного векторного произведения, получим

$$\mu \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{r} \right) = -\frac{1}{\rho^3} \left\{ \mathbf{r}^2 \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \frac{\mathbf{r}}{2} \frac{d\mathbf{r}^2}{ds} \right\} = \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \frac{\mathbf{r}}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{r}}{\rho} \right).$$

Отсюда после интегрирования по s приходим к соотношению

$$\mu \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{\rho} + \mathbf{a},$$

где \mathbf{a} — постоянный вектор.

Умножая обе части последнего равенства скалярно на вектор \mathbf{r} , получим

$$\rho + (\mathbf{a}, \mathbf{r}) = 0. \quad (26)$$

В этом соотношении \mathbf{r} — радиус-вектор движущейся точки, ρ — длина вектора \mathbf{r} , так что $r = \rho e$, где \mathbf{e} — единичный вектор, сонаправленный вектору \mathbf{r} . Заменяя в формуле (26) вектор \mathbf{r} на $\rho \mathbf{e}$ и сокращая затем на ρ , получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e}) = -1.$$

Так как \mathbf{a} — постоянный вектор, а \mathbf{e} — единичный, то последнее равенство можно переписать в следующем виде:

$$|\mathbf{a}| \cos \varphi = -1,$$

где φ — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{e} .

Заметим, что угол φ — постоянный. Следовательно, постоянным будет и угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{r} . Это означает, что траектория движущейся точки расположена на круговом конусе с осью \mathbf{a} и углом раствора $2(\pi - \varphi)$.

Задача. Доказать, что траектория точки является геодезической линией конуса — кривой, которая при разворачивании конуса на плоскость разворачивается в прямую.

7°. Движение заряженной частицы в постоянном электромагнитном поле

Пусть электрическая \mathbf{E} и магнитная \mathbf{H} напряженности постоянны, т. е. имеют одно и то же значение в любой момент времени и в любой точке пространства.

Векторное уравнение движения частицы имеет вид

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \varepsilon \mathbf{E} + \mu \left(\mathbf{H} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \varepsilon \mathbf{E} + \mu \frac{d}{dt} (\mathbf{H} \times \mathbf{r})$$

(ε и μ — постоянные). После интегрирования получим

$$m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \varepsilon \mathbf{E} t + \mu (\mathbf{H} \times \mathbf{r}) + \mathbf{C}. \quad (27)$$

Выберем систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось Oz была направлена вектору \mathbf{H} , а ось Oy была ортогональна векторам \mathbf{E} и \mathbf{H} . Тогда

$$\mathbf{E} = (E_1, 0, E_3), \quad \mathbf{H} = (0, 0, H_3),$$

и векторное соотношение (27) в координатах запишется так:

$$\begin{aligned} m \frac{dx}{dt} &= \varepsilon E_1 t + \mu H_3 y + C_1, \\ m \frac{dy}{dt} &= \mu H_3 x + C_2, \\ m \frac{dz}{dt} &= \varepsilon E_3 t + C_3. \end{aligned} \quad (28)$$

Дифференцируя первое из уравнений (28) по t и используя второе, получим, что

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -a^2 (x + \rho),$$

где $a = \frac{\mu H_3}{m}$ и ρ — постоянная.

Положим $u=x+p$. Это позволит переписать предыдущее соотношение в следующем виде:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a^2u = 0.$$

Интегрируя это уравнение и вновь заменяя u на $x+p$, получим

$$x = -p + A \sin(at + \alpha). \quad (29)$$

После подстановки найденного выражения для x во второе из уравнений (28) и последующего интегрирования имеем

$$y = -qt + b - A \cos(at + \alpha). \quad (30)$$

Наконец, из последнего уравнения (28) находим

$$z = \lambda t^2 + vt + \tau. \quad (31)$$

Закон движения частицы задается формулами (29)—(31). Ее движение можно представить так: частица движется по окружности

$$x = A \sin(at + \alpha), \quad y = A \cos(at + \alpha),$$

центр которой перемещается по кривой, определяемой параметрическими уравнениями

$$x = -p, \quad y = -qt + b, \quad z = \lambda t^2 + vt + \tau. \quad (32)$$

При этом окружность все время остается параллельной плоскости Oxy .

Если $q=0$ и $\lambda=0$, то формулы (32) представляют собой уравнения прямой, параллельной оси Oz , и частица движется по винтовой линии.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В этом параграфе мы познакомимся с геометрическими методами исследования уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z, \quad (1)$$

широко известного под названием уравнения синус-Гордона. Происхождение этого уравнения связано с геометрическими исследованиями. Об этом мы подробнее расскажем ниже. Уравнение синус-Гордона встречается в различных задачах естествознания. Мы познакомимся с некоторыми применениями этого уравнения в физике.

1°. Чебышёвские сети на поверхности

В 1878 г. известный русский математик П. Л. Чебышёв* в работе «О кройке одежды» (Чебышёв П. Л. О кройке одежды//Успехи математических наук. 1946. Т. 1, вып. 2; перевод с французского: Tchebycheff P. Sur la coupe des vêtements//Assoc. Frans. — 1878. Oeuvres II) исследовал вопрос о специальных сетях на поверхностях. Эти сети, называемые теперь *чебышёвскими*, характеризуются следующим свойством: в каждом сетевом четырехугольнике противоположные стороны равны. Ясно, что нити куска ткани, натянутой на поверхность, образуют на ней чебышевскую сеть (рис. 2).

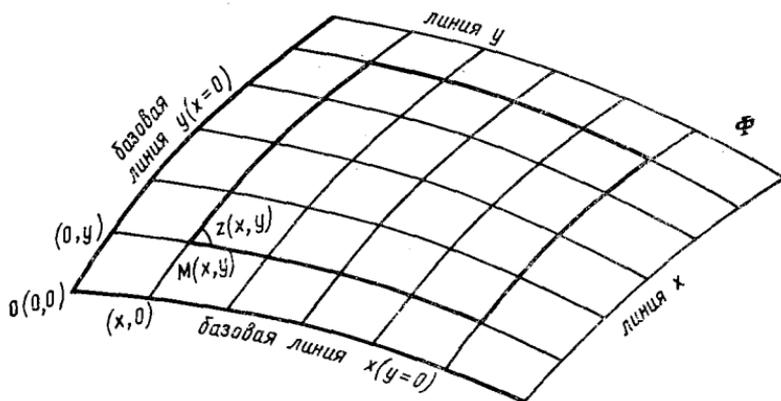


Рис. 2. Сеть линий на поверхности Φ . Яркими линиями выделен сетевой четырехугольник. Угол $z(x, y)$, который образуют пересекающиеся в точке $M(x, y)$ поверхности Φ линии сети — координатные линии — линия x и линия y , называется *сетевым углом*

Пусть на поверхности Φ задана чебышевская сеть и линии этой сети выбраны за координатные линии. Одну из линий первого семейства примем за базовую линию x (линия $y=0$), а другого — за базовую линию y (линия $x=0$). За координату x точки M на поверхности выберем длину отрезка базовой линии, отсчитываемого (с учетом знака) от начальной точки $O(0, 0)$. Аналогично выбирается координата y . Угол между координатными линиями x и y в точке $M(x, y)$ (*сетевой угол*) обозначим через $z(x, y)$.

Из определения чебышевской сети вытекает, что параметры x и y — длины дуг соответствующих координатных линий и поэтому если $r(x, y)$ — радиус-вектор поверхности Φ , то

$$r_x^2 = 1, r_y^2 = 1, r_x \cdot r_y = \cos z(x, y).$$

* Чебышёв Пафнутий Львович (26.5.1821—8.12.1894) — русский математик.

Следовательно, первая квадратичная форма поверхности Φ для выбранной внутренней системы координат x и y имеет вид

$$I = ds^2 = dx^2 + 2 \cos z dx dy + dy^2. \quad (2)$$

Напомним, что

$$E = r_x^2 = 1, \quad F = r_x r_y = \cos z, \quad G = r_y^2 = 1. \quad (3)$$

Верно и обратное: если первая квадратичная форма поверхности имеет вид (2), то сеть координатных линий x и y является чебышевской.

Итак, для того чтобы сеть линий x и y на поверхности была чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы первая квадратичная форма этой поверхности имела вид (2).

Найдем уравнение для сетевого угла $z(x, y)$ чебышевской сети. Подсчитаем кривизну K поверхности Φ при помощи формулы (19) § 5 главы 2, замечая, что по этой формуле кривизну поверхности можно вычислить, если известны лишь коэффициенты E , F и G первой квадратичной формы. Полагая в формуле (19) $u=x$ и $v=y$ и используя формулы (3), получим, что

$$\begin{aligned} W &= EG - F^2 = 1 - \cos^2 z = \sin^2 z, \\ E_u &= E_x = 0, \quad E_v = E_y = 0, \\ F_u &= F_x = -\sin z \cdot z_x, \quad F_v = F_y = -\sin z \cdot z_y, \\ G_u &= G_x = 0, \quad G_v = G_y = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из формул (4) следует, что в определителе третьего порядка, располагающемся в правой части соотношения (19), первая и третья строки равны, и поэтому этот определитель равен нулю. Тем самым

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{W}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_y - F_x}{\sqrt{W}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{F_y - G_x}{\sqrt{W}} \right\}.$$

Отсюда, вновь привлекая формулы (4), получаем нужное нам уравнение для сетевого угла z :

$$z_{xy} = -K \sin z. \quad (5)$$

Эта формула посредством несложных преобразований вытекает из формулы для сетевого угла, приведенной Чебышёвым в цитированной выше работе. Сравнивая формулу (5) и уравнение (1), видим, что уравнение для сетевого угла переходит в уравнение синус-Гордона при $K = -1$. Тем самым с геометрической точки зрения решение уравнения синус-Гордона связано с задачей построения чебышевских сетей на поверхностях, гауссова кривизна K которых равна -1 . Более того, каждому решению уравнения синус-Гордона на такой поверхности отвечает чебышевская сеть.

2°. Изометрические погружения плоскости Лобачевского в евклидово пространство E^3

Плоскость Лобачевского определяется системой аксиом Лобачевского, отличающейся от системы аксиом Евклида лишь аксиомой о параллельных. У Лобачевского аксиома о параллельных утверждает, что через точку вне данной прямой можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.

Введем на плоскости Евклида прямоугольную декартову систему координат (x, y) . Линейный элемент евклидовой плоскости в этой координатной системе имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (6)$$

а гауссова кривизна K_E линейного элемента (6) равна нулю:

$$K_E \equiv 0. \quad (7)$$

В этом можно легко убедиться при помощи формулы (19) § 5 главы 2.

На плоскости Лобачевского можно ввести полугеодезическую систему координат (x, y) так, что

$$ds^2 = dx^2 + e^{2kx} dy^2, \quad (8)$$

где $k = \text{const}$. (Этот вопрос разобран в книге Н. В. Ефимова * «Высшая геометрия» (М.; Л., ОГИЗ ГИТТЛ, 1945).

Вычислим гауссову кривизну K_L плоскости Лобачевского, воспользовавшись формулой (11) § 6 главы 2 (см. также формулу (9) этого параграфа). Вновь считая $u=x$, $v=y$, получим

$$K_L = -\frac{\frac{d^2}{dx^2}(e^{kx})}{e^{kx}} = -k^2.$$

Таким образом, плоскость Лобачевского имеет постоянную гауссову кривизну

$$K_L = -k^2.$$

В частности, если $k=1$, то

$$K_L = -1. \quad (9)$$

Обычно считают, что кривизна плоскости Лобачевского равна -1 .

Обратимся теперь к вопросу об изометрическом погружении плоскости Лобачевского в евклидово пространство E^3 .

Пусть задана плоскость Лобачевского, т. е. двумерное риманово многообразие (см. главу 4. Риманова геометрия), линейный элемент которого задается формулой

$$ds^2 = dx^2 + e^{2x} dy^2. \quad (10)$$

Эта формула получается из формулы (8) при $k=1$.

* Ефимов Николай Владимирович (31.5.1910—12.8.1982) — советский математик.

Для решения вопроса о том, существует ли поверхность в пространстве E^3 , первая квадратичная форма которой задается соотношением (10), обратимся к § 5 главы 2. В параграфе исследовалась следующая задача. Пусть даны две квадратичные формы

$$Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2 \text{ и } Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2.$$

Существует ли поверхность Φ , для которой эти формы будут соответственно первой и второй квадратичными формами? Окончательный вывод приведенных там рассуждений состоит в следующем: если коэффициенты E, F, G, L, M, N этих форм связаны соотношениями Гаусса и Петерсона — Кодацци (формулы (19) и (20) § 5 главы 2), то такая поверхность Φ существует и, с точностью до положения в пространстве, единственная (теорема Бонне, 3° § 5 главы 2).

Мы поставили перед собой другую задачу. Нам дана лишь первая квадратичная форма (форма (10)). Тем самым коэффициенты E, F, G — известные функции, а коэффициенты L, M, N второй квадратичной формы неизвестны. Требуется найти в пространстве E^3 поверхность Φ , первая квадратичная форма которой совпадает с заданной. Эта задача называется *задачей об изометрическом погружении* в трехмерное евклидово пространство абстрактно заданной двумерной метрики.

Для решения поставленной задачи можно поступить так: будем рассматривать уравнения Гаусса и Петерсона—Кодацци как соотношения, которым удовлетворяют неизвестные L, M и N . Если из этих уравнений удастся найти L, M и N , то возникнет следующая ситуация. Мы будем располагать известными функциями E, F, G и найденными L, M, N , причем все они связаны соотношениями Гаусса — Петерсона — Кодацци. Согласно теореме Бонне существует поверхность с данной первой квадратичной формой (формой (10)) и второй квадратичной формой с найденными коэффициентами L, M и N .

Займемся исследованием этого вопроса для случая плоскости Лобачевского (плоскости L^2).

Конечно, можно было бы поступить стандартным способом — обратиться к какому-нибудь из линейных элементов плоскости L^2 , например к ds^2 , определяемому формулой (10), составить уравнения Гаусса и Петерсона — Кодацци, в которых коэффициенты L, M и N будут неизвестными функциями, и попытаться как-то охарактеризовать решения этой системы. Но этот путь непростой, поскольку мы не имеем никакой дополнительной информации о неизвестных функциях L, M и N . Поэтому мы поступим по-другому. Представим себе, что в пространстве E^3 есть поверхность Φ , внутренняя геометрия которой представляет собой геометрию Лобачевского (напомним, что понятие внутренней геометрии обсуждалось в § 6 главы 2). Некоторая информация о поверхности Φ уже у нас имеется: ее гауссова кривизна отрицательна — $K_{\text{л}} = -1$. Так как гауссова кривизна равна отношению дискриминантов второй и первой квадратичных форм поверхности (см. форму-

лу (34) § 4 главы 2) и дискриминант первой формы положителен, то знак дискриминанта второй формы совпадает со знаком гауссовой кривизны. В рассматриваемом случае этот знак отрицателен и поэтому на поверхности Φ можно ввести параметризацию, при которой координатные линии будут асимптотическими линиями поверхности (см. 9° § 4 главы 2). Выберем на поверхности Φ такую параметризацию и обозначим ее параметры через u и v . В этом случае вид первой квадратичной формы — ее коэффициенты $E^*(u, v)$, $F^*(u, v)$ и $G^*(u, v)$ — пока нам явно неизвестен, зато коэффициенты L и M равны нулю. Так как

$$K_L \equiv -1 = \frac{LN - M^2}{E^*G^* - F^{*2}},$$

то с учетом $L \equiv 0$, $N \equiv 0$ имеем

$$M^2 = E^*G^* - F^{*2}.$$

Подставляя значения $L \equiv 0$, $M = \sqrt{E^*G^* - F^{*2}}$, $N \equiv 0$ в уравнения Петерсона — Кодаци (формулы (20) § 5 главы 2), после несложных преобразований получим следующую систему соотношений:

$$F^*E_v^* - E^*G_u^* = 0, \tag{11}$$

$$G^*E_v^* - F^*G_u^* = 0.$$

Эту систему можно рассматривать как линейную однородную систему относительно неизвестных E_v^* и G_u^* . Так как определитель Δ системы (11) удовлетворяет условию

$$\Delta = E^*G^* - F^{*2} > 0,$$

то эта система имеет только нулевое решение

$$E_v^* \equiv 0, \quad G_u^* \equiv 0$$

и, следовательно,

$$E^* = E^*(u), \quad G^* = G^*(v).$$

Введем новые параметры x и y по формулам

$$x = \int_0^u \sqrt{E^*(\alpha)} d\alpha, \quad y = \int_0^v \sqrt{G^*(\beta)} d\beta.$$

При таком преобразовании параметров имеем

$$dx^2 = E^* du^2, \quad dy^2 = G^* dv^2$$

и, далее,

$$ds^2 = dx^2 + 2 \cos z dx dy + dy^2, \tag{12}$$

где $z(x, y)$ — сетевой угол координатной сети. (Если $ds^2 = dx^2 +$

$+2F^*dx dy + dy^2$, то $F^* = \cos z$, где z — угол между координатными линиями.)

Мы можем сделать теперь важный вывод: если внутренняя геометрия поверхности Φ представляет собой геометрию Лобачевского, то сеть асимптотических линий на этой поверхности является чебышевской сетью (в 1° было установлено, что если линейный элемент поверхности имеет вид (12), то сеть координатных линий будет чебышевской).

Отметим еще одно обстоятельство. В проведенных рассуждениях мы исходили из предположения, что поверхность Φ имеет гауссову кривизну $K \equiv -1$. Но тогда для сетевого угла $z(x, y)$ семейства асимптотических линий поверхности Φ , образующих чебышевскую сеть, имеет место уравнение синус-Гордона (1).

Таким образом, с геометрической точки зрения решения уравнения синус-Гордона либо определяют сетевой угол $z(x, y)$ чебышевской сети на плоскости Лобачевского, либо определяют сетевой угол семейства асимптотических линий на поверхности, внутренняя геометрия которой представляет собой геометрию Лобачевского.

3°. Доказательство теоремы Гильберта о невозможности в евклидовом пространстве E^3 полной плоскости Лобачевского

В конце прошлого и в начале нынешнего века Д. Гильберт* занимался одним из важнейших вопросов естествознания — основаниями геометрии. Он детально исследовал проблему аксиоматического построения геометрии. Геометрия строилась им без обращения к каким-либо реальным объектам. Точки, прямые и плоскости не определялись, их свойства описывались аксиомами — исходными положениями, из которых логически выводились свойства различных геометрических фигур.

Известно, что планиметрия Евклида** и сферическая геометрия представляют собой соответственно внутреннюю геометрию плоскостей и сфер евклидова пространства. Примеры поверхностей постоянной отрицательной кривизны — поверхности вращения, полученные Ф. Миндингом***, — не имеют на регулярных своих частях внутреннюю геометрию, совпадающую с геометрией частей плоскости Лобачевского, но имеют и особенности: ребра, острия и, главное, в целом не представляют полной плоскости Лобачевского. В 1901 г. Гильберт в работе «О поверхностях постоянной гауссовой кривизны» (Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л., ОГИЗ, 1948) рассмотрел вопрос о существовании в пространстве E^3 полной без особенностей плоскости Лобачевского и доказал, что в пространстве E^3 не существует полной и регулярной по-

* Гильберт (Hilbert) Давид (23.1.1862—14.2.1943) — немецкий математик.

** Евклид (Εὐκλείδης) (ок. 340 — ок. 287 до н. э.) — математик эпохи эллинизма.

*** Миндинг (Minding) Фердинанд Готлибович (Эрнст Фердинанд Адольф) (23.1.1806—13.5.1885) — русский математик.

верхности, внутренняя геометрия которой представляет геометрию полной плоскости Лобачевского (рис. 3).

Доказательство Гильберта основано на анализе свойств решений уравнения синус-Гордона. Ниже приводится доказательство Гильберта о невозможности в пространстве E^3 полной плоскости Лобачевского.

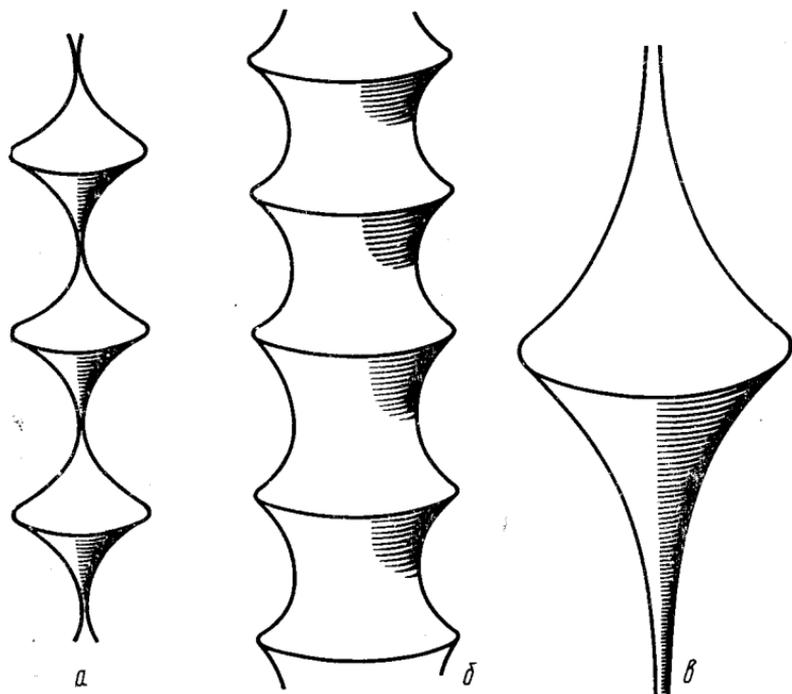


Рис. 3. Поверхности Миндинга постоянной отрицательной кривизны: а — «фонарики»; б — «катушки»; в — псевдосфера

Пусть в пространстве E^3 имеется полная регулярная поверхность Φ , внутренняя геометрия которой является геометрией Лобачевского. Будем считать, что гауссова кривизна K поверхности Φ равна -1 (если гауссова кривизна поверхности равна отрицательной постоянной $-k^2$, то путем подобного преобразования пространства всегда можно добиться того, чтобы кривизна преобразованной поверхности была равна -1). На поверхности Φ возникает чебышевская сеть асимптотических линий. Эта сеть в целом имеет такую же структуру, что и декартова сеть на евклидовой плоскости: любые две линии сети из разных семейств пересекаются (в декартовой сети любая линия x пересекается с любой линией y). Отметим, что такое свойство справедливо не для каждой сети (рис. 4).

Поскольку чебышевская сеть асимптотических устроена в целом как декартова сеть на плоскости, мы будем в дальнейшем

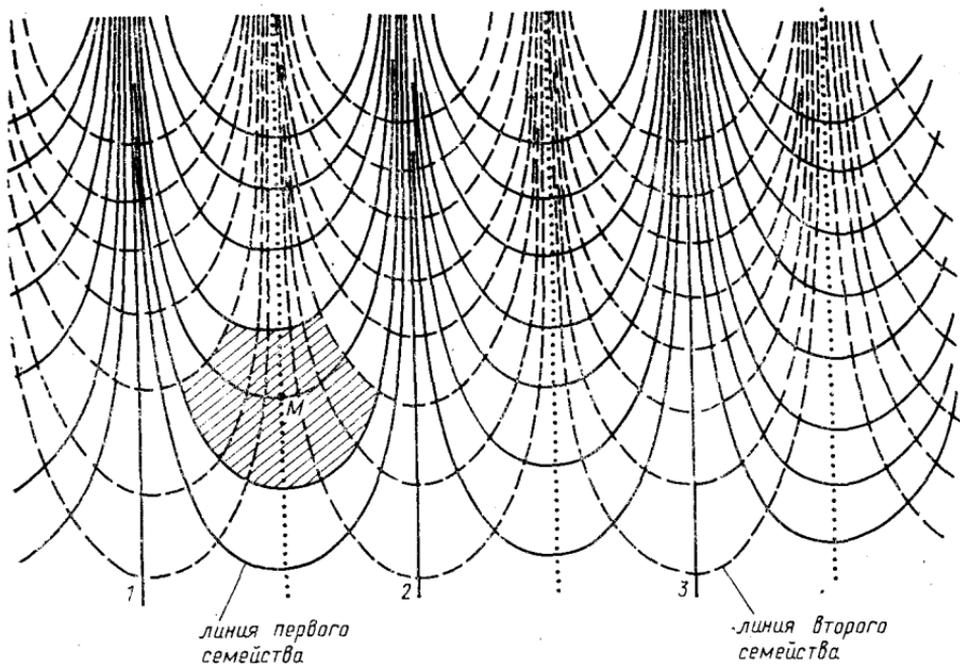


Рис. 4. Пример сети на плоскости, обладающей основным свойством декартовой сети локально, но не обладающей этим свойством в целом. Эта сеть строится так. На плоскости проводится семейство параллельных прямых $\dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, на одинаковом расстоянии друг от друга. Затем берется шаблон — кривая, расположенная, например, между параллельными прямыми 1 и 2, для которой эти прямые являются асимптотами. Этот шаблон путем параллельного переноса в полосу между прямыми 1 и 2 образует часть линий первого семейства. Прямые $\dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ также причисляются к первому семейству. Аналогично строится второе семейство (линии второго семейства обозначены прерывистыми линиями). В окрестности произвольной точки M любые две линии сети из разных семейств пересекаются (основное свойство декартовой сети), но выделенные на рисунке стрелками линии первого и второго семейств не пересекаются

иллюстрировать наши рассуждения на декартовой плоскости параметров x и y (рис. 5).

Сетевой угол $z(x, y)$ между асимптотическими линиями x и y удовлетворяет условию

$$0 < z < \pi. \quad (13)$$

Действительно, в каждой точке поверхности отрицательной кривизны существует два различных асимптотических направления, угол между которыми как раз и равен углу z . Поскольку асимптотические направления различны, угол z между ними не может быть равен ни нулю ни π .

Таким образом, если в пространстве E^3 имеется полная поверхность Φ отрицательной гауссовой кривизны $K \equiv -1$, то на этой

поверхности возникает чебышевская сеть асимптотических линий, устроенная в целом как декартова сеть на плоскости, причем сетевой угол z этой сети удовлетворяет уравнению синус-Гордона (1) и условию (13).

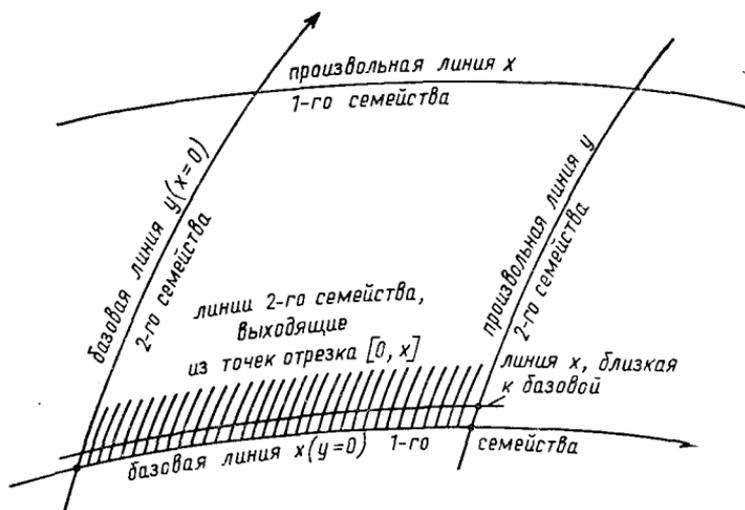


Рис. 5. Две любые линии 1-го и 2-го семейств чебышевской сети пересекаются. Из точек отрезка $[0, x]$ базовой линии x проведем все линии 2-го семейства и на каждой из них отложим дугу одной и той же малой длины y . Концы отложенных отрезков образуют линию 1-го семейства, близкую к базовой и пересекающую произвольно выбранную линию 2-го семейства. Повторяя описанную процедуру достаточное число раз, дойдем до произвольной линии 1-го семейства. Тем самым произвольно выбранные линии из 1-го и 2-го семейств чебышевской сети пересекаются

Гильберт показал, что на всей плоскости параметров x и y не существует решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (13). Это, очевидно, и доказывает невозможность в пространстве E^3 полной плоскости Лобачевского.

Итак, предположим, что на всей плоскости (x, y) существует решение $z(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (13).

Частная производная $z_x(x, y) \neq 0$, ибо из того, что $z_x \equiv 0$ следовало бы $z_{xy} \equiv 0$ и далее в силу уравнения (1) $\sin z = 0$, т. е. либо $z = 0$ либо $z = \pi$, что противоречит условию (13).

Без ограничения общности можно считать, что $z_x(0, 0) > 0$ (случай $z_x(0, 0) < 0$ рассматривается аналогично). Поэтому существует такое $a > 0$, что на отрезке $[0, 3a]$ (рис. 6)

$$z_x(x, 0) > 0.$$

Ясно, что

$$m = \min_{x \in [0, 3a]} z_x(x, 0) > 0.$$

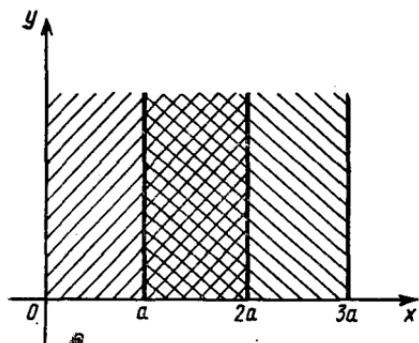


Рис. 6. Полуполоса $\Pi = \{a \leq x \leq 2a, y \geq 0\}$ и полуполоса $\Pi_1 = \{0 \leq x \leq 3a, y \geq 0\}$

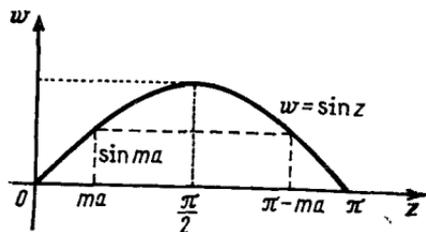


Рис. 7. На участке $ma < z < \pi - ma$ выполняется неравенство $\sin z > \sin ma > 0$

Таким образом,

$$z_x(x, 0) \geq m > 0, \quad x \in [0, 3a]. \quad (14)$$

Согласно условию (13) $\sin z > 0$ на всей плоскости (x, y) и, в частности, в полуполосе

$$\Pi_1 = \{0 \leq x \leq 3a, y \geq 0\}.$$

Так как $(z_x)_y = \sin z > 0$, то функция $z_x(x, y)$ монотонно возрастает при возрастании y в полуполосе Π_1 . Тем самым вследствие неравенства (14) имеем

$$z_x(x, y) \geq m \quad (15)$$

для всех $(x, y) \in \Pi_1$.

Интегрируя неравенство (15) по x от нуля до a при любом фиксированном $y \geq 0$, получим

$$z(a, y) - z(0, y) \geq ma. \quad (16)$$

После интегрирования неравенства (15) по x от $2a$ до $3a$

$$z(3a, y) - z(2a, y) \geq ma. \quad (17)$$

С учетом условия $z(3a, y) < \pi$ приходим к оценке

$$z(2a, y) \leq \pi - ma. \quad (18)$$

В полуполосе Π_1 $z(x, y)$ является возрастающей функцией по x — ее производная положительна (см. (15)). Поэтому в полуполосе $\Pi = \{a \leq x \leq 2a, y \geq 0\}$ выполняются соотношения

$$ma \leq z(x, y) \leq \pi - ma. \quad (19)$$

Выберем a так, чтобы ma было меньше $\pi/2$. Тогда для значений z , удовлетворяющих условию (19), имеем (рис. 7)

$$\sin z \geq \sin(ma) > 0.$$

Отсюда и из уравнения (1) получаем, что для всех точек (x, y) полуполосы Π справедливо неравенство

$$z_{xy} \geq \sin(ma).$$

Интегрируя это неравенство сначала по y от 0 до некоторого $Y > 0$, а затем полученное неравенство по x от a до $2a$, приходим к соотношению

$$z(2a, Y) \geq aY \sin(ma). \quad (20)$$

Если взять

$$Y > \frac{\pi}{a \sin(ma)},$$

то из этого соотношения получается, что в некоторой точке (x, y) полуполосы Π имеет место оценка

$$z(x, y) > \pi,$$

которая противоречит условию (13).

Утверждение Гильберта о невозможности в пространстве полной плоскости Лобачевского доказано.

З а м е ч а н и е. В самом начале проведенных рассуждений мы предположили, что в пространстве E^3 существует полная регулярная поверхность, внутренняя геометрия которой является геометрией Лобачевского. Это предположение следует уточнить. Предварительно сделаем некоторые пояснения. Представим себе обычный бесконечный цилиндр в пространстве E^3 . Его можно рассматривать как поверхность, полученную склеиванием граничных прямых бесконечной полосы. Но этот же цилиндр можно рассматривать как евклидову плоскость, бесконечное число раз намотанную на цилиндр. При этом говорят, что евклидова плоскость является уни-

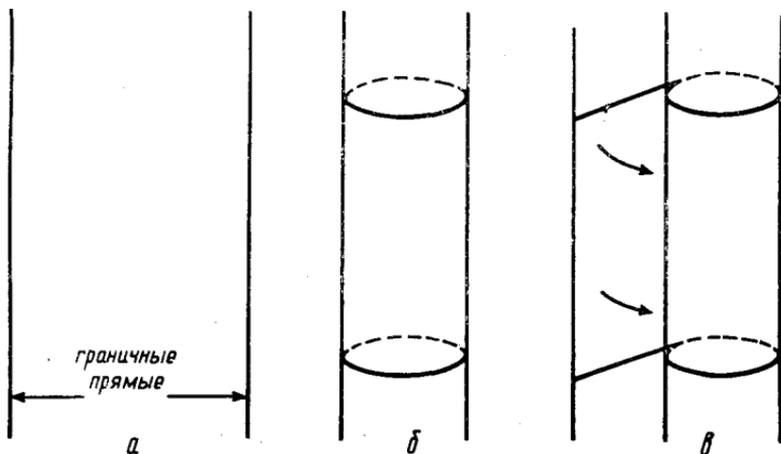


Рис. 8. *a* — бесконечная полоса на плоскости; *б* — цилиндр, полученный склеиванием граничных прямых; *в* — евклидова плоскость, бесконечное число раз намотанная на цилиндр

версальной накрывающей цилиндра. Понятие универсальной накрывающей можно ввести для любой поверхности. В рассуждениях этого пункта имелась в виду именно универсальная накрывающая поверхности (рис. 8).

4°. Доказательство существования регулярного решения уравнения синус-Гордона на всей плоскости

Рассмотрим следующую задачу: на плоскости (x, y) найти функцию $z(x, y)$, удовлетворяющую уравнению синус-Гордона (1)

$$z_{xy} = \sin z$$

и дополнительным условиям на координатных осях

$$z(x, 0) = \varphi(x) \in C^r, \quad z(0, y) = \psi(y) \in C^r, \quad \varphi(0) = \psi(0). \quad (21)$$

Решение задачи (1), (21) было получено Л. Бианки*.

Докажем существование решения задачи (1), (21). Она эквивалентна задаче построения решения интегрального уравнения

$$z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y \sin z \, dx \, dy. \quad (22)$$

Рассмотрим следующую итерационную последовательность:

$$z_{n+1} = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y \sin z_n \, dx \, dy, \quad (23)$$

$$z_0(x, y) \equiv 0, \quad z_1(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0).$$

При $n \geq 1$ имеем

$$|z_{n+1} - z_n| \leq \int_0^x \int_0^y |z_n - z_{n-1}| \, dx \, dy \quad (24)$$

(здесь $x > 0$ и $y > 0$; для других значений x и y рассуждение проводится аналогично). Из того, что $z_0 = 0$, $|\sin z_1| \leq 1$, получаем

$$|z_2 - z_1| \leq \int_0^x \int_0^y |\sin z_1| \, dx \, dy \leq \frac{xy}{(1!)^2}. \quad (25)$$

Проведем далее рассуждения по индукции.

При $n=1$ для разности $z_{n+1} - z_n$ справедлива оценка (25).

* Бианки (Bianchi) Луиджи (18.1.1856—6.6.1928) — итальянский математик.

Предположим теперь, что для некоторого $n > 1$ выполнено неравенство

$$|z_n - z_{n-1}| \leq \frac{(xy)^{n-1}}{((n-1)!)^2}, \quad (26)$$

и покажем, что для разности $z_{n+1} - z_n$ имеет место аналогичная оценка.

Заменяя в правой части неравенства (24) $|z_n - z_{n-1}|$ на $\frac{(xy)^{n-1}}{((n-1)!)^2}$ (см. (26)), получим, что

$$|z_{n+1} - z_n| \leq \int_0^x \int_0^y \frac{(xy)^{n-1}}{((n-1)!)^2} dx dy = \frac{(xy)^n}{(n!)^2}.$$

Тем самым мы можем утверждать справедливость оценки (26) для любого $n > 1$.

Отсюда вытекает равномерная сходимость последовательности $z_n(x, y)$ на всей плоскости. Предел $z(x, y)$ этой последовательности является решением интегрального уравнения (22). Посредством стандартных рассуждений доказывается, что эта функция имеет r непрерывных производных на всей плоскости и поэтому представляет собой решение задачи (1), (21).

З а м е ч а н и е 1. Задача (1), (21) имеет единственное решение.

З а м е ч а н и е 2. В пункте 3 этого параграфа было доказано, что на всей плоскости (x, y) не существует решения $z(x, y)$ уравнения синус-Гордона, удовлетворяющего условию $0 < z < \pi$. Поэтому любое решение $z(x, y)$ этого уравнения на всей плоскости обязательно будет принимать значения, кратные π .

5°. Геометрическая интерпретация произвольных решений уравнения синус-Гордона

Для уяснения геометрических свойств решений уравнения синус-Гордона на всей плоскости рассмотрим конкретный пример — псевдосферу. Это поверхность, получаемая вращением трактрисы вокруг ее асимптоты. Трактриса характеризуется следующим свойством: это плоская кривая, длина отрезка касательной которой от точки касания до некоторой прямой постоянна. Выберем прямую за ось OZ , а постоянную положим равной 1. Тогда параметрические уравнения трактрисы в системе координат (X, Z) можно записать так:

$$X = \sin u, \quad Z = \ln \operatorname{ctg} \frac{u}{2} - \cos u, \quad 0 < u < \pi,$$

а параметрические уравнения псевдосферы будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= \sin u \cos v, & 0 < u < \pi, \\ Y &= \sin u \sin v, & -\infty < v < +\infty. \\ Z &= \ln \operatorname{ctg} \frac{u}{2} - \cos u, \end{aligned} \quad (27)$$

Значениям $0 < u < \frac{\pi}{2}$ отвечает верхняя полость псевдосферы, значениям $\frac{\pi}{2} < u < \pi$ — нижняя полость, а значению $u = \frac{\pi}{2}$ — ребро возврата ($Z=0$) (рис. 9). Поскольку v — угол поворота плоскости

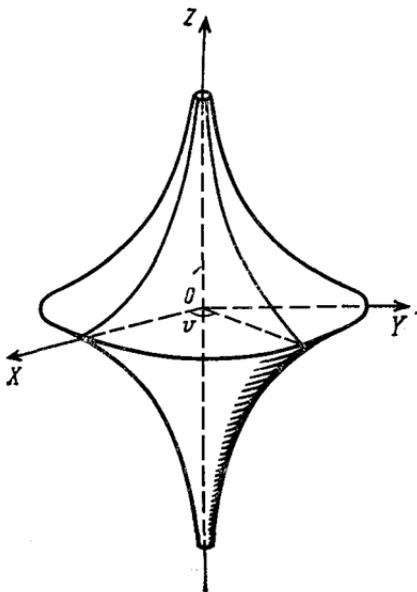


Рис. 9. Псевдосфера

(X, Z), в которой лежит трактриса, и при вращении этой плоскости вокруг оси OZ этот угол изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то плоскость (X, Z) совершает бесконечно много оборотов и, значит, параметрические уравнения (27) представляют собой параметрические уравнения бесконечной обмотки псевдосферы — ее универсальной накрывающей.

Отметим важное обстоятельство: функции, входящие в параметрические уравнения (27), в области задания параметров u и v представляют собой аналитические функции. Однако для регулярности поверхности этого недостаточно: рассматриваемая поверхность имеет особенность — ребро возврата, отвечающее значению $u = \frac{\pi}{2}$. Для объяснения обратимся к частным производным функций X, Y, Z , определяемых формулами (27). Имеем

$$\begin{aligned}
 X_u &= \cos u \cos v, & X_v &= -\sin u \sin v, \\
 Y_u &= \cos u \sin v, & Y_v &= \sin u \cos v, \\
 Z_u &= -\frac{\cos^2 u}{\sin u}, & Z_v &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

При $u = \frac{\pi}{2}$ и любом v получаем, что

$$X_u=0, \quad Y_u=0, \quad Z_u=0,$$

т. е. радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$ поверхности имеет при $u = \frac{\pi}{2}$ равную нулю производную \mathbf{r}_u . Тем самым $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{0}$ в точках ребра $u = \frac{\pi}{2}$ (это условие будет выполняться при любом другом выборе параметров на псевдосфере).

Вычислим первую и вторую квадратичные формы псевдосферы. Имеем

$$\begin{aligned}
 I &= ds^2 = \operatorname{ctg}^2 u \, du^2 + \sin^2 u \, dv^2, \\
 II &= |\operatorname{ctg} u| \, du^2 - \sin u |\cos u| \, dv^2
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

(значения $\operatorname{ctg} u$ и $\cos u$ берутся по абсолютной величине, что отвечает выбору внешней нормали псевдосферы и для верхней и для нижней ее полостей).

Эти формулы справедливы для всех значений параметров, кроме $u = \frac{\pi}{2}$.

Кривизна псевдосферы равна -1 .

Асимптотические линии определяются из соотношения $II=0$. Вытекающие из него уравнения

$$\frac{du}{\sin u} - dv = 0, \quad \frac{du}{\sin u} + dv = 0 \tag{30}$$

справедливы для всех значений u , заключенных между нулем и π , включая $u = \frac{\pi}{2}$. Интегрируя эти дифференциальные уравнения, получаем уравнения асимптотических линий псевдосферы:

$$\begin{aligned}
 \text{1-е семейство: } \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} - v &= c_1, \\
 \text{2-е семейство: } \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + v &= c_2.
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

В частности, для $u = \frac{\pi}{2}$ из соотношений (31) находим:

$$v = c_1, \quad v = c_2.$$

Тем самым параметр v может принимать любые значения. Точка,

отвечающая значениям $\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$, принадлежит одновременно и асимптотической линии 1-го семейства и асимптотической линии 2-го семейства.

Вычислим угол z между асимптотическими линиями разных семейств. Из соотношений (30) получаем для асимптотических направлений следующие выражения:

$$(du_1:dv_1) = (\sin u:1) \quad (1\text{-е семейство}),$$

$$(du_2:dv_2) = (\sin u:-1) \quad (2\text{-е семейство}).$$

Подставляя найденные выражения в формулу

$$\cos z = \frac{E du_1 du_2 + F (du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G dv_1 dv_2}{\sqrt{E du_1^2 + 2F du_1 dv_1 + G dv_1^2} \sqrt{E du_2^2 + 2F du_2 dv_2 + G dv_2^2}},$$

получим, что

$$\cos z = \cos 2u. \quad (32)$$

При $u = \frac{\pi}{2}$ (ребро псевдосферы) из этой формулы вытекает, что

$$\cos z = \cos \pi = -1,$$

т. е. $z = \pi$. Значит, в точках ребра асимптотические линии разных семейств касаются друг друга. Асимптотические линии касаются также и ребра возврата псевдосферы (убедитесь в этом сами).

Построим параметрические уравнения асимптотических линий, ограничившись подробным рассмотрением линий 1-го семейства (для 2-го вычисления проводятся аналогично)

Из соотношений (31) для асимптотических 1-го семейства имеем: $v = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} - c_1$. Подставляя это значение для v в параметрические уравнения псевдосферы (27), получим

$$X = \sin u \cos \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} - c_1 \right),$$

$$Y = \sin u \sin \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} - c_1 \right), \quad (33)$$

$$Z = \ln \operatorname{ctg} \frac{u}{2} - \cos u.$$

Кривая (33) является регулярной для всех значений параметра u , $0 < u < \pi$, включая и значение $u = \frac{\pi}{2}$, отвечающее ребру псевдосферы. В самом деле, функции X , Y , Z аналитичны в интервале $(0, \pi)$. Что же касается особых точек, то простые вычисления показывают, что

$$X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 u > 0$$

для всех $u \in (0, \pi)$. Тем самым особых точек нет и асимптотические линии 1-го семейства — регулярные кривые.

Таким же свойством обладают и асимптотические линии 2-го семейства.

Итак, мы получили следующий удивительный результат: псевдосфера — поверхность с особенностью (ребро) — покрыта двумя семействами асимптотических линий без особенностей. Так как псевдосфера не является в целом регулярной поверхностью, то эти асимптотические мы будем называть *обобщенными* (рис. 10).

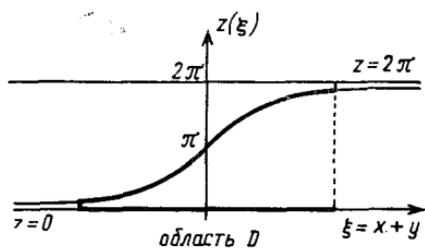
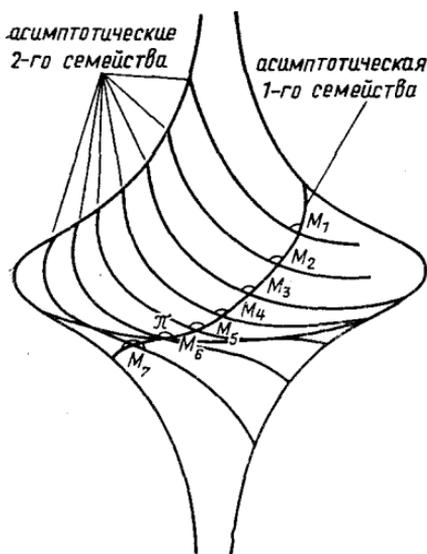


Рис. 10. Обобщенные асимптотические на псевдосфере. В точках $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$ отмечены углы между асимптотическими. В точке M_8 этот угол равен π . В точке M_7 этот угол больше π .

Рис. 11. Переход из предельного состояния $z=0$ при $\xi \rightarrow +\infty$ в постоянное предельное состояние $z=2\pi$ практически локализован в области D .

Введем на псевдосфере новые внутренние координаты x и y по формулам

$$x = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{v}{2}, \quad y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \frac{v}{2}. \quad (34)$$

Тогда

$$dx = \frac{du}{2 \sin u} - \frac{dv}{2}, \quad dy = \frac{du}{2 \sin u} + \frac{dv}{2}$$

и поэтому

$$du = \frac{1}{2} (dx + dy) \sin u, \quad dv = -dx + dy.$$

Подставляя найденные выражения для du и dv в правую часть первого из соотношений (29), получим

$$I = \operatorname{ctg}^2 u \, du^2 + \sin^2 u \, dv^2 = \cos^2 u (dx + dy)^2 + \sin^2 u (dx - dy)^2 = \\ = dx^2 + 2 \cos 2u \, dx \, dy + dy^2.$$

Так как $\cos 2u = \cos z$, то в координатах x и y первая квадратичная форма примет вид

$$I = dx^2 + 2 \cos z \, dx \, dy + dy^2. \quad (35)$$

Обращаясь к формулам (31) и (34), видим, что линии $y = \operatorname{const}$ (линия x) и $x = \operatorname{const}$ (линия y) являются асимптотическими. Так как псевдосфера — поверхность постоянной отрицательной кривизны, то эти линии образуют чебышевскую сеть. В этом, впрочем, можно убедиться непосредственно, исходя из вида (35) первой квадратичной формы псевдосферы. Так как кривизна K псевдосферы равна -1 , то сетевой угол $z(x, y)$ удовлетворяет уравнению синус-Гордона

$$z_{xy} = \sin z.$$

В рассматриваемом случае сетевой угол легко вычисляется. Из формулы (32) вытекает, что $z = 2u$. Выражая u через x и y при помощи формул (34), получим

$$x + y = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}, \quad 2u = 4 \operatorname{arctg} e^{x+y},$$

и далее $z = 4 \operatorname{arctg} e^{x+y}$.

Итак, функция

$$z = 4 \operatorname{arctg} e^{x+y} \quad (36)$$

является решением уравнения синус-Гордона и представляет собой сетевой угол между обобщенными асимптотическими универсальной накрывающей псевдосферы (рис. 11).

Найдем область изменения внутренних координат x и y . Каждой точке (u, v) из полосы $\Pi = \{0 < u < \pi, -\infty < v < +\infty\}$ изменения координат u и v по формулам (34) ставится в соответствие единственная точка (x, y) . Покажем, что при этом точки (x, y) заполняют всю плоскость. Для этого достаточно убедиться в том, что по заданным значениям x и y из соотношений (34) определяется единственная точка (u, v) открытой полосы Π . Имеем

$$u = 2 \operatorname{arctg} e^{x+y}, \quad v = x - y. \quad (37)$$

Так как $e^{x+y} > 0$, то u удовлетворяет условию $0 < u < \pi$ и, значит, $(u, v) \in \Pi$.

Таким образом, мы доказали, что решение (36) уравнения синус-Гордона задано на всей плоскости (x, y) . Линиями уровня этого решения являются прямые $x + y = c$. В частности, линии уровня $x + y = 0$ отвечает значение $z = \pi$.

Подведем итог.

На всей плоскости (x, y) построено аналитическое решение (36) уравнения синус-Гордона. Это решение можно интерпретировать как сетевой угол $z(x, y)$ сети обобщенных асимптотических линий на универсальной накрывающей псевдосферы. В проведенных рассуждениях мы исходили из заданной поверхности — псевдосферы, а затем построили решение уравнения синус-Гордона.

Можно поставить такой вопрос. Пусть на всей плоскости (x, y) задано регулярное решение уравнения синус-Гордона (используя метод, предложенный Бианки, таких решений можно найти бесконечно много). Согласно теореме Гильберта это решение обязательно принимает значения, кратные π . Можно ли указать в пространстве E^3 такую поверхность постоянной отрицательной кривизны $K = -1$ (возможно, с особенностями; они будут отвечать значениям $z = k\pi$), сетевой угол $z(x, y)$ сети обобщенных асимптотических линий на которой совпадает с этим решением? Если это так, то найденную поверхность вместе с сетью обобщенных асимптотических линий и сетевым углом можно рассматривать как одну из возможных геометрических интерпретаций решений уравнения синус-Гордона.

Ответ на поставленный вопрос утвердительный: каждому решению уравнения синус-Гордона можно поставить в соответствие такого рода поверхность (см.: Позняк Э. Г. Геометрическая интерпретация регулярных решений уравнения $z_{xy} = \sin z$ // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1332—1336).

Отметим, что указанная геометрическая интерпретация решений уравнения синус-Гордона помогает уяснению сути некоторых физических процессов.

6°. Понятие солитонных решений дифференциальных уравнений

В физике солитонами называются нелинейные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью и с не изменяющимся во времени профилем. Для этих волн имеет место такой характер взаимодействия, при котором наблюдается лишь сдвиг фаз взаимодействующих волн.

Введем понятия, нужные для дальнейшего изложения. Пусть

$$f(u, v, z_u, z_v, \dots) = 0 \quad (38)$$

— дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $z = z(u, v)$. Решение этого уравнения вида

$$z(u, v) = z_T(\xi), \quad \xi = u - kv, \quad k = \text{const}, \quad (39)$$

называется *бегающей стационарной волной*. Это автомодельное решение заданного уравнения. (Решение уравнения называется автомодельным, если фактически оно представляет собой функцию одной переменной. В рассматриваемом случае такой переменной является $\xi = u - kv$. Если уравнение допускает автомодельные ре-

шения, то при помощи замены переменных оно, как правило, сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению.)

Уединенной волной $z_{ST}(\xi)$ называется локализованная бегущая стационарная волна, т. е. волна, переход которой из одного постоянного предельного состояния в другое (возможно, и в то же самое) практически полностью локализован.

Примером уединенной волны может служить построенное выше решение

$$z = 4 \operatorname{arctg} e^{x+y}$$

уравнения синус-Гордона

$$z_{xy} = \sin z.$$

Солитоном будем называть решение уравнения (38) в виде уединенной стационарной волны z_{ST} , которая при взаимодействии с другими такими же волнами асимптотически сохраняет свои форму и скорость.

Таким образом, если $z(u, v)$ — решение уравнения (38), состоящее только из уединенных волн при больших отрицательных значениях времени

$$z(u, v) \cong \sum_{j=1}^N z_{ST}(\xi_j), \quad v \rightarrow -\infty, \quad \xi_j = u - k_j v, \quad k_j = \text{const},$$

то такие уединенные волны будут солитонами, если единственным результатом их взаимодействия при $v \rightarrow +\infty$ может быть лишь фазовый сдвиг. Иными словами, и при $v \rightarrow +\infty$ решение $z(u, v)$ имеет вид

$$z(u, v) \cong \sum_{j=1}^N z_{ST}(\bar{\xi}_j), \quad v \rightarrow +\infty, \quad \bar{\xi}_j = u - k_j v + \delta_j, \quad \delta_j = \text{const}.$$

Величины δ_j представляют собой фазовые сдвиги уединенных стационарных волн z_{ST} .

Отметим, что решение, представляющее собой композиционное состояние нескольких солитонов, называется многосолитонным решением. (Подробное исследование солитонных решений уравнения синус-Гордона можно найти в книге: Новиков С. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980).

Перечислим некоторые из физических явлений, в которых возникает уравнение синус-Гордона.

1. Распространение ультракоротких импульсов в двухуровневых резонансных средах.
2. Динамика блоховских стенок в ферромагнитных кристаллах.
3. Некоторые задачи нелинейной электродинамики.
4. Эффект Джозефсона.
5. Распространение колебаний в механических линиях передач.

6. Некоторые задачи единой теории элементарных частиц.
7. Распространение дислокаций в кристаллах.
8. Некоторые задачи акустических взаимодействий.

7°. Физическая интерпретация поверхностей постоянной отрицательной кривизны

Предлагаемый ниже геометрический подход — физическая интерпретация поверхностей постоянной отрицательной кривизны, равной -1 , предложенный А. Г. Поповым (см.: Попов А. Г. Геометрический подход в некоторых задачах, связанных с уравнением синус-Гордона: Автореф. канд. дис. М., 1988), будет рассмотрен на примере явления 1 приведенного перечня.

Основная идея заключается в следующем. Поверхности постоянной отрицательной кривизны, равной -1 (ПОК-1), используются в качестве фазовых поверхностей, описывающих эволюцию физического процесса, задаваемого уравнением синус-Гордона. Фазовая поверхность представляет собой аналог фазового пространства в классической механике — каждая точка фазовой поверхности полностью характеризует состояние исследуемых физических величин для соответствующих значений координат фазовой поверхности.

Фазовую ПОК-1, отвечающую решению $z(x, y)$ уравнения синус-Гордона, обозначим через $\Phi[z]$. Пусть $H\{(x, y)\}$ — область допустимых значений параметров x и y функции $z(x, y)$. Каждой точке $(x, y) \in H$ отвечает точка $P(x, y) \in \Phi[z]$. При изменении параметров $(x, y) \in H$, связанных с изменением физического процесса, меняется радиус-вектор $r^H(x, y)$ поверхности $\Phi[z]$, описывая, вообще говоря, некоторую кривую L^H — фазовую траекторию ($L^H \subset \Phi[z]$). Ясно, что L^H определяет исследуемый процесс.

Пусть L^H — регулярная кривая, так что $r^H(x, y)$ представляет собой достаточное число раз дифференцируемую функцию. Возможны следующие случаи:

1) $L^H \subset \Phi[z, z \neq k\pi]$, k — целое, т. е. L^H располагается на регулярной части поверхности $\Phi[z]$,

2) $L^H \equiv \Phi[z, z \equiv k\pi]$, т. е. L^H совпадает с особенностью $\Phi[z]$ (например, с ребром, как на псевдосфере).

Поповым сформулирован следующий принцип описания эволюции физической величины.

Пусть физическая величина $z(x, y)$ удовлетворяет уравнению синус-Гордона. Тогда в качестве фазовой поверхности для описания ее эволюции может быть использована соответствующая решению $z(x, y)$ ПОК-1 $\Phi[z]$. При этом выполняется следующее:

а) если $z(x, y_0) \neq k\pi$, то $z(x, y) \rightarrow k\pi, y \rightarrow \infty$; (40)

б) если $z(x, y_0) = k\pi$, то $z(x, y) = k\pi$

для любого y . (41)

Иллюстрацией применения этого принципа могут служить так называемая теорема площадей в явлении распространения ультракоротких импульсов в двухуровневых резонансных средах и эффект самоиндуцированной прозрачности.

Перейдем к описанию этих явлений.

В двухуровневой резонансной среде атомы могут находиться только в двух энергетических состояниях — нижнем (основном) с энергией E_1 и верхнем с энергией E_2 ($E_2 > E_1$). Распространение ультракоротких импульсов длительностью $10^{-9} \dots 10^{-12}$ с в резонансной среде имеет ряд специфических особенностей: для возникающих процессов оказываются несправедливыми модели, основанные на линейной теории дисперсии (для малых интенсивностей) или на скоростных уравнениях переноса излучения (некогерентное взаимодействие). Характерной особенностью описываемого процесса является то, что релаксационные явления (соударения, спонтанное излучение) не успевают разрушить фазовую память системы, вследствие чего поляризация среды становится нелинейной функцией амплитуды и фазы распространяющегося электромагнитного импульса.

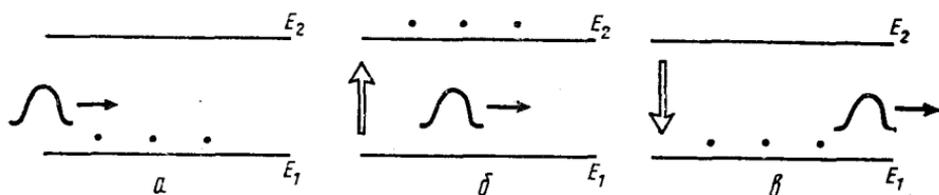


Рис. 12. а — исходное состояние; б — инвертирование среды; в — индуцированное излучение

При распространении ультракороткого импульса в двухуровневой резонансной среде атомы этой среды, находящиеся в нижнем энергетическом состоянии E_1 , под воздействием переднего фронта импульса переходят в верхнее состояние с энергией E_2 , вследствие чего среда становится полностью инвертированной. Под действием оставшейся части импульса атомы, перешедшие в верхнее энергетическое состояние, начинают индуцированно излучать, и при этом полученная ими энергия возвращается обратно распространяющемуся импульсу. В результате энергия, передаваемая квантовой системе, отбирается обратно, вследствие чего восстанавливается первоначальная форма импульса. Подобное явление возможно вследствие того, что длительность импульса меньше времени релаксации и поэтому инвертирование среды и индуцированное излучение происходят раньше релаксационных процессов, которые могли бы нарушить когерентность взаимодействия (рис. 12).

Для моделирования процесса распространения ультракороткого импульса в двухуровневой резонансной среде следует задать

уравнения Максвелла* для описания электромагнитного импульса и квантовый (двухуровневый) ансамбль атомов для описания среды.

Представим поле распространяющегося ультракороткого импульса как

$$\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}^*(x, y) \cos \Psi, \quad \Psi = \omega y - \kappa x + \tilde{\varphi}(x, y),$$

где x — координата, y — время, \mathcal{E}^* — амплитуда, $\tilde{\varphi}$ — фаза, $\kappa(\kappa, 0, 0)$ — волновой вектор. Тогда дипольный момент системы можно записать в виде

$$P_0(x, y) = P_1(x, y) \cos \Psi + P_2(x, y) \sin \Psi,$$

где P_1 — реактивная составляющая (описывает вклад в дисперсию), P_2 — активная составляющая (определяет вклад в поглощение света средой).

Для рассматриваемой задачи система уравнений Максвелла приводится к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial y} &= - \left(\Delta\omega + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right) P_2, \\ \frac{\partial P_2}{\partial y} &= \left(\Delta\omega + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right) P_1 + \frac{\mu^2}{\hbar} \mathcal{E}^* \tilde{n}, \\ \frac{\partial \tilde{n}}{\partial y} &= - \frac{\mathcal{E}^*}{\hbar} P_2, \\ \frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial x} + \frac{\eta}{c} \frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial y} &= - \frac{2\pi\omega N_0}{\eta c} \langle P_2 \rangle, \\ - \left(\kappa - \frac{\omega}{c} \eta \right) \mathcal{E}^* + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} + \frac{\eta}{c} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right) \mathcal{E}^* &= - \frac{2\pi\omega N_0}{\eta c} \langle P_1 \rangle \end{aligned} \quad (42)$$

(см.: Полуэктов И. А., Попов Ю. М., Ройтберг В. С. Эффект самоиндуцированной прозрачности // Успехи физических наук. 1974. Т. 114, № 1. С. 97—131; Caudrey P. J., Gibbon J. D., Eilbeck J. C., Bullough R. K. Exact multisoliton solutions of the self-induced transparency and sine-Gordon equation // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30, N 6. P. 237—238; McCall S. L., Hahn E. L. Self-induced transparency // Phys. Rev. 1969. V. 183, N 2. P 457—485).

В уравнениях (42) приняты следующие обозначения: \tilde{n} — разность заселенностей нижнего и верхнего энергетических состояний, $\Delta\omega = \omega - \omega_{21}$ (ω_{21} — частота перехода), N_0 — число частиц в единице объема, η — нерезонансная часть коэффициента преломления.

* Максвелл (Maxwell) Джеймс Клерк (13.6.1831—5.11.1879) — английский физик.

В случае

$$\tilde{\varphi}(u, v) = 0 \quad (43)$$

система (42) допускает точное интегрирование. Условие (43) определяет так называемый случай отсутствия фазовой модуляции.

Введем вектор

$$R = \left(\frac{P_1}{\mu}, \frac{P_2}{\mu}, \tilde{n} \right).$$

Это позволяет записать первые три уравнения системы (42) в следующем виде:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \Omega \times R, \quad R(\Delta\omega, x, -\infty) = (0, 0, 1), \quad (44)$$

где $\Omega = \left(-\frac{\mu \kappa^*}{h}, 0, \Delta\omega \right)$ — вектор угловой скорости.

Поясним физический смысл вектора R . В отсутствие импульса атомы находятся в нижнем энергетическом состоянии $R(0, 0, 1)$. Полная инверсия соответствует повороту вектора R на угол π . Пренебрежение релаксацией означает, что вращение вектора R заканчивается до того, как успевают сказаться релаксационные эффекты.

В случае точного резонанса, $\Delta\omega = 0$, уравнение (44) легко интегрируется:

$$P_1 = 0, \quad P_2 = \mu \sin \psi, \quad \tilde{n} = \cos \psi. \quad (45)$$

При этом угол поворота ψ определяется так:

$$\psi(x, y) = \frac{\mu}{h} \int_{-\infty}^y \mathcal{E}^*(x, \beta) d\beta. \quad (46)$$

Полный поворот равен

$$\vartheta(x) = \psi(x, +\infty) = \frac{\mu}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}^*(x, \beta) d\beta. \quad (47)$$

Величина $\vartheta(x)$ называется площадью импульса.

Четвертое уравнение системы (42) в случае $\omega = \omega_{21}$ с учетом формул (45) заменой переменных

$$\tau_1 = \alpha_0 x, \quad \tau_2 = c\alpha_0 \left(\frac{\eta x}{c} - y \right), \quad \alpha_0^2 = \frac{2\pi\omega\mu^2 N_0}{\eta h c^2}$$

сводится к уравнению синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} = \sin \psi$$

При подробном рассмотрении системы (42) относительно величины $\vartheta(x)$ выявляется следующая закономерность:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{\mathcal{K}}{2} \sin \vartheta, \quad (48)$$

определяющая изменение площади ультракороткого импульса (см.: Lamb G. L. jr. Analytical description of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium//Rev. Mod. Phys. 1971. V. 43, № 2. P. 99—124). Величина $\mathcal{K}=\mathcal{K}(\omega)$ — коэффициент поглощения слабого монохроматического поля частоты ω .

Из последней формулы нетрудно получить соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \exp \left(-\frac{\mathcal{K}x}{2} \right), \quad (49)$$

выражающее содержание «теоремы площадей» (здесь ϑ_0 — начальная площадь импульса).

Из уравнения (48) вытекает, что если начальная площадь импульса $\vartheta_0=k\pi$ (k — целое), то импульс должен распространяться в рассматриваемой среде без изменения площади. Такое явление получило название эффекта самоиндуцированной прозрачности. Если же начальная площадь $\vartheta_0 \neq k\pi$, то, как видно из формулы (49), площадь импульса стремится в процессе своей эволюции к стабильному значению $k\pi$.

Из соотношений (46), (47) видно, что при достаточно больших временах y функция ψ и площадь импульса ϑ бесконечно близки. Поэтому для величины ϑ справедливы положения (40), (41) сформулированного принципа. При этом положение (41) соответствует эффекту самоиндуцированной прозрачности, а положение (40) качественно выражает «теорему площадей» (стремление площади импульса к значению, кратному π).

§ 3. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА В ТЕНЗОРНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

1°. Метрический тензор евклидова пространства

В этом пункте мы напомним некоторые известные факты (см. § 3 главы 3), не всегда придерживаясь принятых там обозначений.

Пусть в n -мерном линейном пространстве V^n задана билинейная форма $A(x, y)$, симметричная ($A(y, x)=A(x, y)$) и невырожденная (для любого вектора $x \neq 0$ можно указать такой вектор y , что $A(x, y) \neq 0$). Потребуем также, чтобы билинейная форма $A(x, y)$ была полярной для некоторой положительно определенной квадратичной формы. Определим в пространстве V^n операцию скалярного умножения для любых двух векторов x и y следующим образом:

$$\langle x, y \rangle = A(x, y). \quad (1)$$

В этом случае пространство V^n наделяется метрической структу-

рой и превращается в евклидово пространство E^n со скалярным произведением (1).

Пусть e_1, \dots, e_n — базис пространства E^n . Тогда тензор g типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ с координатами

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle \quad (2)$$

называется (ковариантным) метрическим тензором пространства E^n . Ясно, что

$$g_{ij} = g_{ji}. \quad (3)$$

Если (κ_k^i) — матрица перехода от базиса e_1, \dots, e_n к базису $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$, то координаты $'g_{km}$ тензора g в базисе \hat{f}_k связаны с координатами g_{ij} этого тензора в базисе e_i соотношениями

$$'g_{km} = g_{ij} \kappa_k^i \kappa_m^j. \quad (4)$$

Напомним (см. § 3 главы 3), что $\det(g_{ij})$ преобразуется по правилу

$$\det('g_{km}) = (\det(\kappa_k^i))^2 \det(g_{ij}). \quad (5)$$

Так как билинейная форма $A(x, y)$ по условию не вырождена, то $\det(g_{ij}) \neq 0$. Из соотношения (5) вытекает, что $\det('g_{km})$ отличен от нуля в любом базисе \hat{f}_k . Поэтому в любом базисе возможен переход от матрицы (g_{ij}) к обратной матрице, компоненты которой обозначим через g^{ij} . В § 3 главы 3 было доказано, что (g^{ij}) — тензор типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Это означает, что если (λ_i^s) — матрица перехода от базиса \hat{f}_k к базису e_i , то

$$'g^{st} = g^{ij} \lambda_i^s \lambda_j^t.$$

Матрица $('g^{st})$ является обратной к матрице $('g_{st})$.

З а м е ч а н и е. Тензор g^{ij} называется (контравариантным) метрическим тензором евклидова пространства E^n . Этот тензор симметричен, $g^{ij} = g^{ji}$.

Контравариантный метрический тензор естественно обозначить тем же символом g , что и ковариантный, а величины g^{ij} и g_{ij} рассматривать соответственно как контрвариантные и ковариантные координаты одного и того же тензора g .

2°. Операции опускания и поднятия индексов

Пусть A — тензор типа $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ с координатами $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$. Покажем, например, как проводится операция поднятия индекса i_1 при помощи метрического тензора g . Воспользуемся его контравариантными координатами g^{ij} . Свернем произведение тензоров g и A по индексу j у тензора g и по нижнему индексу i_1 у тензора A , т. е. построим тензор с координатами $g^{i\alpha} A_{\alpha i_2 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$. Заменяя ин-

декс i на i_1 , обозначим полученные координаты через $A_{i_1 \dots i_p}^{i, k_1 \dots k_q}$. Таким образом,

$$A_{i_1 \dots i_p}^{i, k_1 \dots k_q} = g^{i, \alpha} A_{\alpha i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}.$$

Полученное соотношение наглядно показывает, что у тензора A при помощи тензора g действительно поднимается индекс. Операция поднятия индекса можно проводить несколько раз, привлекая для этого различные нижние индексы заданного тензора.

Операция опускания индекса при помощи метрического тензора определяется аналогично. Опуская, например, верхний индекс k_q , получаем

$$A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_{q-1}} = g_{k_q \alpha} A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_{q-1} \alpha}.$$

Пример 1. Мы ввели тензор g^{ij} при помощи матрицы (g^{ij}) , обратной матрице (g_{ij}) ковариантного метрического тензора. Это означает, что

$$g^{i\alpha} g_{\alpha j} = \delta_j^i, \quad (6)$$

где δ_j^i — символ Кронекера.

Попробуем опустить у тензора g^{ij} оба индекса при помощи ковариантного метрического тензора g_{ij} . В результате получим дважды ковариантный тензор \tilde{g}_{ij} :

$$\tilde{g}_{ij} = g_{i\alpha} g_{j\beta} g^{\alpha\beta}.$$

Преобразуем последнее выражение, используя равенство (6) и свойства символа Кронекера:

$$\tilde{g}_{ij} = g_{i\alpha} g_{j\beta} g^{\alpha\beta} = g_{i\alpha} (g_{j\beta} g^{\alpha\beta}) = g_{i\alpha} \delta_j^\alpha = g_{ij}.$$

Таким образом, тензор g_{ij} получается из тензора g^{ij} путем опускания обоих верхних индексов при помощи ковариантного метрического тензора.

Точно так же и тензор g^{ij} можно получить из тензора g_{ij} путем поднятия обоих нижних индексов при помощи контравариантного метрического тензора.

Это и позволяет рассматривать величины g_{ij} и g^{ij} как ковариантные и контравариантные координаты одного и того же тензора — метрического тензора g .

Пример 2. Ковариантные и контравариантные координаты векторов. Скалярное произведение векторов в координатах.

Пусть x_i — ковариантные координаты вектора x . Тогда $x^i = g^{i\alpha} x_\alpha$ — контравариантные координаты вектора x .

При помощи ковариантных и контравариантных координат векторов можно специальным образом записать выражения для скалярного произведения векторов. Пусть x_i и y^k — координаты векторов x и y , соответственно ковариантные и контравариантные.

Пусть e_1, \dots, e_n — базис в пространстве E^n , относительно которого и берутся координаты рассматриваемых векторов. Имеем

$$x = x^\alpha e_\alpha, \quad y = y^\beta e_\beta.$$

Используя свойства скалярного произведения и соотношение (2), получим

$$\langle x, y \rangle = \langle x^\alpha e_\alpha, y^\beta e_\beta \rangle = \langle e_\alpha, e_\beta \rangle x^\alpha y^\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = x_\beta y^\beta.$$

Тем самым

$$\langle x, y \rangle = x_\beta y^\beta. \quad (7)$$

Формула (7) является первой из формул векторной алгебры, записанная при помощи тензорных обозначений.

3°. Ортонормированные базисы в пространстве E^n

Из курса линейной алгебры известно, что матрицу (g_{ij}) симметричной билинейной формы $A(x, y) = g_{ij} x^i y^j$ можно привести к диагональному виду. Обратимся к билинейной форме $A(x, y)$, введенной в пункте 1. При сформулированных там предположениях выражение

$$A(x, y) = \langle x, y \rangle = g_{ij} x^i y^j$$

дает скалярное произведение векторов x и y , а коэффициенты g_{ij} представляют собой скалярные произведения базисных векторов e_i и e_j :

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle.$$

Приведем эту билинейную форму к диагональному виду. Тогда в новом базисе $'e_i$

$$'g_{ij} = \langle 'e_i, 'e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (8)$$

Базис $'e_1, \dots, 'e_n$, удовлетворяющий условиям (8), называется *ортонормированным*. В частности, в этом базисе скалярное произведение векторов x и y с координатами x^i и y^i будет равно

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i, \quad (9)$$

а квадрат длины вектора x может быть вычислен по формуле

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n (x^i)^2. \quad (10)$$

Обратимся к линейным преобразованиям пространства, при которых ортонормированный базис переходит в ортонормированный. Такие преобразования называются *ортогональными*.

Пусть L — ортогональное преобразование и e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис. Тогда Le_1, \dots, Le_n также ортонормированный базис. Возьмем в пространстве E произвольный вектор x и рассмотрим его образ — вектор $X=Lx$.

Вектор X в базисе Le_i имеет такие же координаты, что и вектор x в базисе e_i . В самом деле, если $x=x^i e_i$, то

$$X=Lx^i e_i=x^i Le_i. \quad (11)$$

Так как Le_1, \dots, Le_n — ортонормированный базис, то для скалярного произведения векторов и для квадрата длины вектора справедливы формулы (9) и (10).

Пусть $X=Lx$ и $Y=Ly$. Тогда

$$\langle X, Y \rangle = x^i x^k \langle Le_i, Le_k \rangle = x^i y^k \delta_{ik} = \sum_{i=1}^n x^i y^i = \langle x, y \rangle$$

и

$$\langle X, X \rangle = x^i x^k \langle Le_i, Le_k \rangle = x^i x^k \delta_{ik} = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = \langle x, x \rangle.$$

Таким образом, при ортогональных преобразованиях длины векторов не изменяются и сохраняется скалярное произведение:

$$\langle X, Y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \langle X, X \rangle = \langle x, x \rangle.$$

4°. Дискриминантный тензор

Рассмотрим тензор $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ типа $\binom{0}{n}$, где n — размерность пространства, кососимметрический по любым двум индексам. Ясно, что любая координата $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ этого тензора в данном базисе может быть найдена по формуле

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 0, & \text{если среди индексов } i_1, i_2, \dots, i_n \\ & \text{хотя бы два совпадают;} \\ (-1)^{\text{sign} \sigma} \varepsilon_{12 \dots n}, & \text{если все индексы различны.} \end{cases} \quad (12)$$

Здесь показатель $\text{sign} \sigma$ равен 0 или $+1$ в зависимости от четности или нечетности перестановки $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_n)$.

Пусть в заданном ортонормированном базисе e_1, e_2, \dots, e_n

$$\varepsilon_{12 \dots n} = 1. \quad (13)$$

Тогда, согласно правилу (12), определены все координаты $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметрического тензора в выделенном базисе. Этот кососимметрический по любым двум индексам тензор будем называть *дискриминантным тензором*, а его координаты в базисе $'e_1, \dots, 'e_n$ обозначать через $'c_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

В соответствии с правилом (12) для вычисления координат тензора в базисе $'e_1, 'e_2, \dots, 'e_n$ достаточно знать значения координаты $'c_{12\dots n}$.

Пусть $B=(\lambda_i^s)$ — матрица перехода от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису $'e_1, 'e_2, \dots, 'e_n$. Тогда, используя равенство (13), получим, что

$$\begin{aligned} 'c_{12\dots n} &= \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n} \varepsilon_{i_1\dots i_n} = \varepsilon_{12\dots n} \sum_{(\sigma)} (-1)^{\text{sign} \sigma} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n} = \\ &= \det (\lambda_i^s) = \det B. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $'g_{ij}$ — координаты метрического тензора в базисе $'e_1, 'e_2, \dots, 'e_n$ и $'G=(g_{ij})$ — матрица этого тензора. Тогда

$$'G=B^T I B,$$

где I — единичная матрица тензора g_{ij} в выделенном ортонормированном базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Поэтому

$$\det 'G = \det B^T \cdot \det I \cdot \det B = (\det B)^2.$$

Отсюда, согласно формуле (14), получаем, что

$$'c_{12\dots n} = \pm \sqrt{\det 'G}. \quad (15)$$

Знак (+ или —) в формуле (15) совпадает со знаком определителя матрицы перехода от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису $'e_1, 'e_2, \dots, 'e_n$.

Назовем заданный ортонормированный базис e_1, e_2, \dots, e_n , в котором выполняется равенство (13), *правым*. Все базисы пространства E^n , определители матриц перехода к которым положительны, также назовем *правыми*, а базисы, определители матриц перехода к которым от этого заданного базиса отрицательны, назовем *левыми*. Будем говорить в этом случае, что пространство E^n *ориентировано*.

Итак, для координаты $c_{12\dots n}$ дискриминантного тензора в базисе e_1, e_2, \dots, e_n получено выражение

$$c_{12\dots n} = \pm \sqrt{\det G},$$

где G — матрица метрического тензора g в базисе e_1, e_2, \dots, e_n . Знак плюс отвечает правому базису, а знак минус — левому.

5°. Ориентированный объем

Рассмотрим в ориентированном евклидовом пространстве аффинную систему координат — фиксированную точку O и базис e_1, \dots, e_n . Координаты точки M суть координаты вектора \vec{OM} в базисе e_1, \dots, e_n .

Пусть

$$x^1, x^2, \dots, x^n \quad (16)$$

— упорядоченная линейно независимая система из n векторов пространства E^n .

Множество всех точек M пространства E^n , определяемое соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n, \\ 0 &\leq \alpha_1 \leq 1, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 1, \quad \dots, \quad 0 \leq \alpha_n \leq 1, \end{aligned} \quad (17)$$

называется n -мерным параллелепипедом в пространстве E^n , натянутом на векторы (16).

Ориентированным объемом n -мерного параллелепипеда называется число

$$V = V(x^1, x^2, \dots, x^n) = c_{i_1 i_2 \dots i_n} x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n}, \quad (18)$$

где $c_{i_1 i_2 \dots i_n}$ — координаты дискриминантного тензора в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , а $x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_n}$ — контравариантные координаты векторов x^1, x^2, \dots, x^n в этом базисе.

Название «ориентированный объем» объясняется тем, что если векторы (16) образуют правый базис, то $V > 0$, а если левый, то $V < 0$.

При $n=3$ ориентированный объем, вычисляемый по формуле (18), представляет собой объем параллелепипеда, натянутого на векторы x^1, x^2, x^3 , взятый со знаком «+», если тройка x^1, x^2, x^3 — правая, и со знаком «-», если эта тройка левая, и следовательно, равен смешанному произведению векторов x^1, x^2, x^3 .

6°. Векторное произведение

При помощи дискриминантного тензора можно получить тензорное выражение для векторного произведения двух векторов в пространстве E^3 . Такая запись векторного произведения широко используется для проведения вычислений в криволинейных координатах.

Пусть c_{ijk} — координаты дискриминантного тензора в базисе e_1, e_2, e_3 пространства E^3 . Рассмотрим тензор $c^{ijk} = g^{im} c_{mjk}$. Тогда координаты z^i вектора $z = [x, y]$ в базисе e_1, e_2, e_3 можно записать в следующем виде:

$$z^i = c^i_{jk} x^j y^k. \quad (19)$$

Убедиться в этом совсем нетрудно. С формальной точки зрения выражение в правой части формулы (19) представляет собой

тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, т. е. z^i можно рассматривать как контравариантные координаты вектора. Поэтому достаточно проверить, что z^i — координаты вектора $z = [x, y]$ в каком-то определенном базисе (для ортонормированного базиса эта проверка проводится особенно просто, и мы предоставляем ее читателю).

Естественно поставить вопрос об обобщении понятия векторного произведения на многомерный случай. Это можно сделать геометрически, но более простой путь — воспользоваться формулой, обобщающей формулу (19).

Пусть x^1, x^2, \dots, x^{n-1} — векторы в пространстве E^n . Определим координаты z^i векторного произведения

$$z = [x^1, x^2, \dots, x^{n-1}]$$

векторов x^1, x^2, \dots, x^{n-1} при помощи соотношений

$$z^i = c_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^i x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_{n-1}}.$$

В этой формуле $c_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^i$ — координаты дискриминантного тензора в пространстве E^n с поднятым первым индексом, $x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_{n-1}}$ — контравариантные координаты векторов x^1, x^2, \dots, x^{n-1} соответственно.

7°. Двойное векторное произведение

Чтобы получить тензорное выражение для координат двойного векторного произведения $[a, [b, d]]$ векторов a, b, d , воспользуемся формулой

$$[a, [b, d]] = b \langle a, d \rangle - d \langle a, b \rangle. \quad (20)$$

При помощи формулы (19) и выражения $g_{ij} x^i y^j$ для скалярного произведения произвольных векторов x и y формулу (20) можно записать в следующем виде:

$$c_{kl}^i a^k c_{mn}^l b^m d^n = b^i g_{kn} a^k d^n - d^i g_{km} a^k b^m. \quad (21)$$

Заменим в первом слагаемом $b^i g_{kn} a^k d^n$ правой части этой формулы b^i на $b^m \delta_m^i$, а во втором слагаемом d^i на $d^n \delta_n^i$. Это позволит записать формулу (21) так:

$$(c_{kl}^i c_{mn}^l) a^k b^m d^n = (g_{kn} \delta_m^i - g_{km} \delta_n^i) a^k b^m d^n. \quad (22)$$

Так как полученное соотношение (22) справедливо для любых векторов a, b, d , то оно представляет собой тождество относительно

но координат a^k, b^m, d^n этих векторов. Поэтому для любых i, k, m, n имеет место равенство

$$c_{ki}^l c_{mn}^l = g_{kn} \delta_m^i - g_{km} \delta_n^i. \quad (23)$$

Пусть z^i — координаты двойного векторного произведения $[a, [b, d]]$. Тогда согласно формулам (20) и (21)

$$z^i = c_{ki}^l c_{mn}^l a^k b^m d^n.$$

При помощи этого соотношения и равенства (23) получаем тензорное выражение для координат двойного векторного произведения $[a, [b, d]]$:

$$z^i = (g_{kn} \delta_m^i - g_{km} \delta_n^i) a^k b^m d^n.$$

При помощи операции ковариантного дифференцирования многие формулы анализа, имеющие широкие применения в геометрии, физике и механике, можно записать в инвариантном относительно преобразования координат виде. Приведем некоторые из этих формул.

8°. Расходимость вектора

Пусть T^i — контравариантные координаты векторного поля T в n -мерном римановом пространстве. В пункте 1 § 9 главы 3 была введена операция ковариантного дифференцирования векторного поля, определяемая формулой

$$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i T^j.$$

Свертку тензора $\nabla_k T^i$ называют *расходимостью векторного поля* T и обозначают через $\operatorname{div} T$.

Тем самым

$$\operatorname{div} T = \nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^i T^j. \quad (24)$$

Для того чтобы привести формулу (24) к более удобному для использования виду, проведем предварительно некоторые вычисления.

Положим

$$g = \det(g_{ij}),$$

где g_{ij} — координаты метрического тензора в координатах $(x) = (x^1, \dots, x^n)$. Непосредственным дифференцированием нетрудно убедиться в справедливости формулы

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = g^{ij} g \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

С учетом этой формулы получим, что

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^i &= \frac{1}{2} g^{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} \right] = \\ &= \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\operatorname{div} T = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} T^k). \quad (25)$$

Относительно прямоугольных декартовых координат x, y, z в трехмерном евклидовом пространстве E^3 формула (25) принимает обычную форму

$$\operatorname{div} T = \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z},$$

где T_x, T_y, T_z — координаты вектора T относительно соответствующих осей.

9°. Оператор Бельтрами — Лапласа

Для любой гладкой функции f , заданной в открытой области риманова пространства, ее *градиент* $\operatorname{grad} f$ определяется как вектор, ковариантные и контравариантные координаты которого вычисляются по формулам

$$T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} = \nabla_i f \quad (26)$$

и

$$T^i = g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} = g^{ik} \nabla_k f = \nabla^i f \quad (27)$$

соответственно.

Дифференциальный оператор, ставящий в соответствие каждой гладкой функции расходимость ее градиента, называется *оператором Бельтрами** — Лапласа.

Обозначение: $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$.

С учетом формул (25) — (27) имеем

$$\begin{aligned} \Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f &= \nabla_i (\nabla^i f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \nabla^i f) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

* Бельтрами (Beltrami) Эудженио (16.11.1835—18.2.1900) — итальянский математик.

В случае трехмерного евклидова пространства E^3 и прямоугольных декартовых координат x, y, z формула (28) совпадает с обычной формулой для оператора Лапласа:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

10°. Оператор Бельтрами — Лапласа в криволинейных координатах

В приложениях часто оказывается полезным выражение оператора Бельтрами — Лапласа в ортогональных системах координат, т. е. в случае, когда линейный элемент риманова пространства имеет вид

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + \dots + g_{nn}(dx^n)^2.$$

Тогда оператор Бельтрами — Лапласа можно записать так:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g_{11} \dots g_{nn}}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\frac{g_{11} \dots g_{i-1, i-1} g_{i+1, i+1} \dots g_{nn}}{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right).$$

Величины H_i , определяемые формулами

$$H_i = \sqrt{g_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

называются коэффициентами (параметрами) Ламе*. Введение коэффициентов Ламе позволяет записать последнюю формулу следующим образом:

$$\Delta f = \frac{1}{H_1 \dots H_n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{H_1 \dots \widehat{H}_i \dots H_n}{H_i} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right),$$

где выражение $H_1 \dots \widehat{H}_i \dots H_n$ следует понимать так:

$$H_1 \dots \widehat{H}_i \dots H_n = H_1 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_n.$$

В случае пространства E^3 для сферических r, φ, θ имеем

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

и, значит,

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).$$

Для цилиндрических координат r, φ, z получаем соответственно

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

и

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

* Ламе (Lamé) Габриель (22.7.1795—15.1870) — французский математик и инженер.

§ 4. ПСЕВДОЕВКЛИДОВО И ПСЕВДОРИМАНОВО ПРОСТРАНСТВА

Псевдоевклидово и псевдориманово пространства широко используются в специальной теории относительности (СТО) и в общей теории относительности (ОТО). Мы введем понятия этих пространств и обсудим их простейшие свойства, коснувшись проблем СТО и ОТО лишь в малой степени. Этим проблемам посвящена обширная литература, к которой мы будем отсылать читателя по мере развития изложения.

1°. Понятия псевдоевклидова пространства и метрического тензора псевдоевклидова пространства

Пусть V — n -мерное линейное пространство. Пусть $A(x, y)$ — невырожденная симметричная билинейная форма, полярная знакопеременной квадратичной форме. Значение $A(x, y)$ билинейной формы на векторах x и y будем называть *скалярным произведением* векторов x и y и обозначать через $\langle x, y \rangle$. Конечно, наименование «скалярное произведение» условно: в данном случае не выполняется четвертая аксиома обычного скалярного произведения в евклидовом пространстве. В зависимости от выбора вектора x выражение

$$A(x, x) = \langle x, x \rangle$$

может принимать как положительное, так и отрицательное и даже нулевое значения. Это связано с тем, что квадратичная форма $A(x, x)$ в рассматриваемом случае не является знакоположительной. Тем не менее термин «скалярное произведение» является общепринятым и мы будем им пользоваться.

Введем понятие псевдоевклидова пространства.

Псевдоевклидовым пространством называется n -мерное линейное пространство V , в котором скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ векторов x и y задано посредством невырожденной симметричной билинейной формы $A(x, y)$, полярной знакопеременной квадратичной форме:

$$\langle x, y \rangle = A(x, y).$$

Число n называется *размерностью* псевдоевклидова пространства.

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n — базис пространства V и (g_{ij}) — матрица формы $A(x, y)$ в этом базисе

$$g_{ij} = A(e_i, e_j) = \langle e_i, e_j \rangle.$$

Если x^i и y^j — контравариантные координаты векторов x и y , то

$$A(x, y) = g_{ij}x^iy^j = \langle x, y \rangle. \quad (1)$$

Величины g_{ij} представляют собой координаты тензора типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

Этот тензор будем называть *ковариантным метрическим тензором псевдоевклидова пространства*.

Известно, что матрицу (g_{ij}) симметричной билинейной формы путем выбора некоторого нового базиса можно привести к диагональному виду. В силу невырожденности формы $A(x, y)$ и знакопеременности формы $A(x, x)$ этот базис можно выбрать так, что координаты метрического тензора в этом базисе будут равны нулю при $i \neq j$ и единице или минус единице при $i = j$. Число p положительных и число q отрицательных диагональных элементов не зависит от способа приведения матрицы билинейной формы к диагональному виду, и в силу ее невырожденности $p + q = n$.

Проведенные рассуждения объясняют обозначение $E^n_{p,q}$, принятое для n -мерного псевдоевклидова пространства.

Перейдем к обсуждению вопроса об измерении длин векторов в псевдоевклидовом пространстве.

Определим квадрат длины вектора x с координатами x^i в пространстве $E^n_{p,q}$ с метрическим тензором g_{ij} при помощи соотношения

$$s^2(x) = g_{ij}x^i x^j. \quad (2)$$

Согласно формуле (1) имеем

$$s^2(x) = \langle x, x \rangle. \quad (3)$$

Так как квадратичная форма $A(x, x)$ является знакопеременной, то можно указать ненулевые векторы с положительным квадратом длины, с отрицательным квадратом длины и с нулевым квадратом длины. Чтобы в качестве меры длины векторов получать лишь вещественные числа, за длину вектора принимают следующую величину:

$$\sigma(x) = \text{sign } s^2(x) \cdot \sqrt{|s^2(x)|}. \quad (4)$$

2°. Галилеевы* координаты. Преобразования Лоренца

В псевдоевклидовых пространствах важную роль играют системы координат, в которых *квадрат интервала* (так называют квадрат длины вектора x) имеет вид

$$s^2(x) = \sum_{i=1}^p (x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^n (x^i)^2. \quad (5)$$

Такие системы координат называют *галилеевыми*.

Преобразования координат, сохраняющие для квадрата интервала $s^2(x)$ выражение (5), называются *преобразованиями Лоренца*.

* Галилей (Galilei) Галилео (15.2.1564—8.1.1642) — итальянский физик, механик, математик, астроном.

3°. Пространство Минковского *. Преобразования Лоренца в пространстве Минковского

Пространство $E^4_{1,3}$ называется *пространством Минковского*. В СТО это пространство рассматривается как пространство событий и представляет для физики особый интерес.

Нумерация координат векторов в пространстве Минковского обычно начинается с нуля. Таким образом, согласно формуле (5), квадрат интервала $s^2(x)$ в пространстве $E^4_{1,3}$ записывается так:

$$s^2(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (6)$$

Ненулевой вектор x будем называть *временеподобным*, если $\sigma(x) > 0$, *пространственноподобным*, если $\sigma(x) < 0$, и *изотропным*, если $\sigma(x) = 0$.

Докажем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Множество концов всех времениподобных векторов, начала которых совпадают с произвольной фиксированной точкой псевдоевклидова пространства, образует конус.

* Пусть x — времениподобный вектор и $\lambda \neq 0$ — произвольное вещественное число. Если x^i — координаты вектора x , то λx^i — координаты вектора λx и, значит,

$$s^2(\lambda x) = g_{ij}(\lambda x^i)(\lambda x^j) = \lambda^2 g_{ij} x^i x^j = \lambda^2 s^2(x).$$

Поэтому вектор λx также времениподобен:

$$\text{sign } s^2(\lambda x) = \text{sign } s^2(x).$$

Так как конус — это множество концов всех векторов λx , $\lambda \neq 0$, приведенных к общему началу (x — произвольный вектор из некоторого множества векторов пространства V), то утверждение доказано. *

Совершенно аналогично устанавливается, что и множество всех концов пространственноподобных векторов с общим началом, и множество всех изотропных векторов образуют конусы.

Конус времениподобных векторов принято обозначать символом T (от англ. time — время), а конус пространственноподобных векторов — символом S (от англ. space — пространство).

В физике координата x^0 отождествляется с выражением ct , где c — скорость света, а t — временная переменная, x^1 , x^2 , x^3 называются пространственными переменными.

Обратим внимание на структуру конуса T времениподобных векторов в пространстве Минковского. Этот конус распадается на две связанные открытые компоненты T^+ (конус будущего) и T^- (конус прошлого). Конус S пространственноподобных векторов является связным множеством.

Остановимся на множествах T^+ и T^- подробнее. Рассматривая вектор x как перемещение в пространстве $E^4_{1,3}$, можно считать, что

* Минковский (Minkowski) Герман (22.6.1864—12.1.1909) — немецкий математик и физик.

это перемещение характеризуется временным $\Delta t = x^0/c$ и пространственным $\Delta r = \{x^1, x^2, x^3\}$ перемещениями. Временноподобные векторы x определяются условием $s^2(x) > 0$. Ясно, что в этом случае $|\Delta r|/|\Delta t| < c$. Если при этом $\Delta t > 0$, то для перемещения x получается неравенство $0 < |\Delta r|/\Delta t < c$. Такое перемещение по определению принадлежит множеству T^+ и может рассматриваться как перемещение материальной частицы «в будущее». Если $\Delta t < 0$, то перемещение x принадлежит множеству T^- и может рассматриваться как перемещение частицы «в прошлое» (в физике так интерпретируется движение античастиц).

Проведенные рассуждения объясняют наименования: конус будущего для множества T^+ и конус прошлого для множества T^- .

Займемся теперь преобразованиями Лоренца в пространстве Минковского $E^4_{1,3}$.

Пусть e_i — базис, связанный с галилеевой системой координат в псевдоевклидовом пространстве $E^4_{1,3}$. В этом случае квадрат интервала $s^2(x)$ имеет вид (6) и поэтому матрица (g_{ij}) метрического тензора пространства $E^4_{1,3}$ запишется так:

$$J = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Перейдем к новой галилеевой системе координат с базисом $'e_i$ и выясним условия, которым должны удовлетворять коэффициенты λ_i^j матрицы B перехода от базиса e_i к базису $'e_i$. Имеем

$$'e_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha. \quad (8)$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что матрица (g'_{ij}) метрического тензора в базисе $'e_i$ также имеет вид (7). Так как

$$g'_{ij} = \langle 'e_i, 'e_j \rangle = \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta g_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

то, полагая, например, $i=0, j=0$ (напомним, что индексы i, j, α, β пробегает значения 0, 1, 2, 3) и обращаясь к матрице (7), приходим к соотношению

$$(\lambda_0^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_0^\alpha)^2 = 1. \quad (10)$$

Аналогичным способом из соотношений (9) и (7) получаются еще две серии уравнений, связывающих коэффициенты λ_i^j матрицы перехода от базиса e_i к базису $'e_i$:

$$\lambda_0^0 \lambda_\beta^0 - \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_0^\alpha \lambda_\beta^\alpha = 0, \quad (11)$$

$$\lambda_\gamma^0 \lambda_\beta^0 - \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\gamma^\alpha \lambda_\beta^\alpha = \begin{cases} -1, & \gamma = \beta, \\ 0, & \gamma \neq \beta. \end{cases}$$

Соотношения (10), (11) можно записать в матричной форме. Для этого наряду с матрицей $B=(\lambda_i^j)$ рассмотрим матрицу B^* , которая получается из матрицы B путем изменения знаков у элементов трех последних столбцов и последующего транспонирования. Тогда соотношения (10), (11) можно записать так:

$$B^*B=J, \quad (12)$$

где J — матрица (7). Полученная формула представляет собой аналог соответствующей формулы для матрицы C ортогонального преобразования евклидова пространства, записанной в ортонормированном базисе: $C^TC=I$.

Так как $\det B^*=-\det B$ и $\det J=-1$, то $\det(B^*B)=-(\det B)^2=-1$, т. е.

$$\det B=\pm 1. \quad (13)$$

Обозначим через L совокупность всех общих преобразований Лоренца пространства Минковского и выделим из этих преобразований те, которые переводят каждый вектор из конуса будущего T^+ в вектор, также принадлежащий T^+ . Совокупность таких преобразований обычно называют *преобразованиями Лоренца пространства* $E^{4,3}$ и обозначают символом L_+ .

Выделим еще два подмножества из класса общих преобразований Лоренца — так называемые *собственные преобразования Лоренца* L_+ , для которых $\det B=+1$, и *несобственные преобразования Лоренца*, для которых $\det B=-1$.

Примером несобственного преобразования Лоренца является отражение относительно всех трех пространственных осей:

$$'x^1=-x^1, 'x^2=-x^2, 'x^3=-x^3.$$

Пусть B — матрица произвольного несобственного преобразования, а P — матрица только что рассмотренного отражения. Ясно, что произведение произвольного несобственного преобразования Лоренца и отражения будет собственным преобразованием. Его матрица

$$B'=PB. \quad (14)$$

Так как

$$P^2=PP=I, \quad (15)$$

то

$$B=PB'.$$

Таким образом, всякое несобственное преобразование Лоренца является произведением некоторого собственного преобразования с матрицей B' и отражения с матрицей P .

Отметим еще один класс преобразований Лоренца

$$L_{\uparrow}=L_+ \cap L_+$$

(пересечение подмножеств L_+ и L_+) и найдем те преобразования из этого класса, которые не изменяют координаты x^2 и x^3 . Для этого достаточно описать преобразования двумерного псевдоев-

кливова подпространства с координатами x^0 и x^1 , квадрат интервала длины в котором вычисляется по формуле $(x^0)^2 - (x^1)^2$.

Для рассматриваемого случая формулы (10), (11) запишутся так:

$$\begin{aligned}(\lambda_0^0)^2 - (\lambda_0^1)^2 &= 1, \\ \lambda_0^0 \lambda_1^0 - \lambda_0^1 \lambda_1^1 &= 0, \\ (\lambda_1^0)^2 - (\lambda_1^1)^2 &= -1.\end{aligned}\tag{16}$$

Полагая $\lambda_0^1/\lambda_0^0 = \beta$, найдем отсюда выражения для коэффициентов λ_i^j матрицы В преобразования базисных векторов e_0, e_1, e_2, e_3 в базисные векторы $'e_0, 'e_1, 'e_2, 'e_3$:

$$\lambda_0^0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \lambda_0^1 = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \lambda_1^0 = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \lambda_1^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Знак в этих формулах выбирается из условия принадлежности преобразования классу L_+ .

Окончательные формулы преобразования координат имеют следующий вид:

$$'x^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad 'x^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad 'x^2 = x^2, \quad 'x^3 = x^3.\tag{17}$$

Для выяснения физического смысла полученных формул перепишем их, полагая

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad 'x^0 = ct', \quad 'x^1 = x', \quad 'x^2 = y', \quad 'x^3 = z'.$$

Здесь, как обычно, c — скорость света в вакууме, t — время, x, y, z — пространственные координаты. Итак,

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z.\tag{18}$$

Физический смысл постоянной β .

Допустим, что точка M в системе координат (t', x', y', z') неподвижна. Это означает, что время t' изменяется, а пространственные координаты x', y', z' неизменны. Как ведет себя точка M относительно координатной системы (t, x, y, z) ? Найдем дифференциалы соотношений (18). Так как $dx' = dy' = dz' = 0$, то из формул (18) получим, что

$$0 = \frac{-\beta c dt + dx}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad 0 = dy, \quad 0 = dz.$$

Поэтому

$$\frac{dx}{dt} = \beta c, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Таким образом, всякая точка M , неподвижная в системе координат (t', x', y', z') , движется относительно системы координат (t, x, y, z) с постоянной скоростью $v = \beta c$ ($v = \frac{dx}{dt}$) в направлении оси Ox . С такой же скоростью движется и вся система (t', x', y', z') относительно системы (t, x, y, z) .

Итак, $\beta = v/c$, где v — скорость движения координатной системы (t, x, y, z) . Так как скорость v любого движущегося тела меньше скорости света c , то $0 < v < c$. Поэтому $0 < \beta < 1$.

Заменяя в формулах (18) β на $\frac{v}{c}$, получим

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (19)$$

Формулы (19) называются *формулами Лоренца*. Они характеризуют переход от одной инерциальной системы координат (t, x, y, z) к другой инерциальной системе (t', x', y', z') и широко используются в физике.

4°. Псевдориманово пространство. Метрический тензор псевдориманова пространства

В § 1 главы 4 мы уже говорили о понятии псевдориманова пространства. Напомним приведенные там рассуждения.

Пусть $\{M\}$ — открытое множество пространства A^n . На этом множестве $\{M\}$ задается поле симметричного тензора $g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$. При этом выполняются условия: квадратичная дифференциальная форма

$$g_{ij}(M) dx^i dx^j \quad (20)$$

в каждой точке множества $\{M\}$

- 1) невырождена;
- 2) имеет постоянную сигнатуру, т. е. нормальный вид квадратичной формы (20) не зависит от выбора точки из множества $\{M\}$.

При помощи формы (20) введем на множестве $\{M\}$ метрику, положив

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (21)$$

Выражение (21) для ds^2 называют *линейным элементом*, а тензор g_{ij} — *метрическим тензором*.

Если форма (21) является положительно определенной, то говорят, что на множестве $\{M\}$ введена риманова метрика; множество $\{M\}$ в этом случае называется римановым пространством. Если же форма (21) является знакопеременной, то говорят, что

на множестве $\{M\}$ введена псевдориманова метрика и множество $\{M\}$ в этом случае называют псевдоримановым пространством.

Римановы пространства рассматривались в главе 4. Там был построен аппарат для их изучения, были введены важные объекты и понятия. В этом пункте мы укажем, каким образом можно исследовать псевдоримановы пространства.

Исследование псевдоримановых пространств важно, в частности, потому, что они широко используются в общей теории относительности. Мы будем вести изложение по аналогии с построением теории римановых пространств.

1. *Касательное пространство.* Разложим каждую компоненту метрического тензора $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n) \in V^n_{p,q}$ (здесь $V^n_{p,q}$ — псевдориманово пространство: индекс n указывает его размерность, индексы p и q — соответственно число положительных квадратов и число отрицательных квадратов в нормальном виде квадратичной формы (20)). Имеем

$$g_{ij}(x^1, \dots, x^n) = g_{ij}^0(x_0^1, \dots, x_0^n) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(x_0^1, \dots, x_0^n) \cdot (x^k - x_0^k) + \varepsilon_{ijk} \cdot (x^k - x_0^k), \quad (22)$$

где $\varepsilon_{ijk} \rightarrow 0$ при $\rho = \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2} \rightarrow 0$.

Псевдоевклидово пространство $E^n_{p,q}$ с линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij}(x_0^1, \dots, x_0^n) dx^i dx^j \quad (23)$$

называется *касательным псевдоевклидовым пространством* в точке $M_0(x_0) = M_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$ псевдориманова пространства $V^n_{p,q}$.

Формулы (21) — (23) позволяют записать линейный элемент ds^2 пространства $V^n_{p,q}$ в следующем виде:

$$ds^2 = ds^2_0 + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(x_0)(x^k - x_0^k) dx^i dx^j + \varepsilon_{ijk} \cdot (x^k - x_0^k) dx^i dx^j. \quad (24)$$

Из формулы (24) видно, что метрика ds^2 псевдориманова пространства $V^n_{p,q}$ в окрестности точки $M_0(x_0)$ и метрика ds^2_0 касательного псевдоевклидова пространства $E^n_{p,q}$ в окрестности этой же точки разнятся на малые первого порядка относительно $\rho =$

$$= \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2}.$$

З а м е ч а н и е. То, что линейный элемент (23) представляет собой метрику псевдоевклидова пространства $E^n_{p,q}$, непосредственно вытекает из определения псевдориманова пространства.

2. *Преобразование координат в псевдоримановом и касательном псевдоевклидовом пространствах.* Пусть точка $M_0 \in V^n_{p,q}$ имеет нулевые координаты. Тогда линейный элемент ds^2_0 касательного пространства $E^n_{p,q}$ имеет следующий вид:

$$ds^2_0 = g_{ij}(0, \dots, 0) dx^i dx^j. \quad (25)$$

Правые части формул (29) — преобразований координат касательного пространства $E^n_{p,q}$ — представляют собой линейные члены в разложениях функций

$$x^i = x^i('x^1, \dots, 'x^n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

по формуле Тейлора:

$$x^i('x^1, \dots, 'x^n) = x_k^i 'x^k + o\left(\sqrt{'x^1{}^2 + \dots + 'x^n{}^2}\right).$$

3. Локально нормальные координаты в псевдоримановом пространстве

Определение. Координаты (x^i) в псевдоримановом пространстве называются *нормальными в точке* $M_0(0, \dots, 0)$, или *локально нормальными*, если

$$g_{ij}^{\circ} = g_{ij}|_{M_0} = g_{ij}(0, \dots, 0) = \begin{cases} 1, & i = j = 1, \dots, p; \\ -1, & i = j = p+1, \dots, n; \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \quad (30)$$

и

$$g_{ij,k}^{\circ} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \Big|_{M_0} = 0. \quad (31)$$

Справедливо следующее утверждение:

В окрестности каждой точки псевдориманова пространства можно ввести координаты, нормальные в этой точке.

Доказательство сформулированного утверждения проводится в полной аналогии с доказательством теоремы о возможности введения в окрестности каждой точки риманова пространства координат, нормальных в этой точке (см. пункт 3^о § 2 главы 4). Остановимся поэтому только на основных этапах доказательства.

Сначала обосновывается, что невырожденным линейным преобразованием координат вида (29) можно добиться того, что в точке M_0 будут выполняться соотношения (30). Далее указывается такое преобразование координат, при котором сохраняются соотношения (30) и обеспечивается выполнение условий (31).

Отметим, что при завершении доказательства нужно воспользоваться формулами главы 3, приспособив их для рассматриваемого здесь случая.

Детали рассуждений оставляем читателю.

4. О тензоре кривизны (тензоре Римана—Кристоффеля) для псевдориманова пространства

Как было установлено выше, в окрестности данной точки M_0 псевдориманова пространства $V^n_{p,q}$ можно выбрать локально нормальные координаты так, что разложение метрического тензора по формуле Тейлора с центром в точке $M_0(0, \dots, 0)$ имеет вид

$$g_{ij}(x^1, \dots, x^n) = \delta_{ij} + O(\rho^2), \quad (32)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1, \dots, p; \\ -1, & i = j = p+1, \dots, n; \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \quad (33)$$

$$\text{и } \rho = \sqrt{x^1^2 + \dots + x^n^2}.$$

Напомним, что в случае риманова пространства было получено похожее выражение для компонент метрического тензора

$$g_{ij}(x^1, \dots, x^n) = \delta_{ij} + O(\rho^2),$$

и, главное, детально выяснена структура слагаемых $O(\rho^2)$.

Опуская подробности рассуждений (они вполне аналогичны тем, что были проведены в § 2 главы 4), запишем окончательные выражения для компонент метрического тензора $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ пространства $V^n_{p,q}$ в некоторой системе координат, нормальной в данной точке M_0 :

$$g_{ij}(x^1, \dots, x^n) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \overset{0}{R}_{iljm} x^l x^m + o(\rho^2)$$

(здесь $\overset{0}{R}_{iljm}$ — координаты тензора Римана—Кристоффеля для данной точки M_0 и в указанной системе координат (x^1, \dots, x^n)).

5. *Параллельный перенос векторов в псевдоевклидовом пространстве*

Пусть (x^i) — криволинейные координаты в псевдоевклидовом пространстве $E^n_{p,q}$. Обозначим через x радиус-вектор точки M с началом O . Векторы

$$x^i = \frac{\partial x}{\partial x^i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

образуют базис пространства $E^n_{p,q}$ в точке M .

Пусть постоянный вектор ξ переносится в пространстве $E^n_{p,q}$ параллельно (параллельный перенос в линейном пространстве $E^n_{p,q}$, снабженном вполне определенной метрикой, определяется обычно) по кривой $\overline{M_0 M_1}$:

$$x^i = x^i(t), \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (34)$$

в каждой точке M кривой (34) есть базис

$$x_1(M), \dots, x_n(M).$$

Поэтому координаты (постоянного) вектора ξ будут меняться. В каждой точке кривой имеем

$$\xi = \xi^i x_i, \quad d\xi = 0,$$

$$d\xi^i x_i + \xi^i dx_i = 0, \quad dx_i = d \left(\frac{\partial x}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial x^i \partial x^j} dx^j = x_{ij} dx^j. \quad (35)$$

Разлагая вектор x_{ij} по базису x_k

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k,$$

с учетом формул (35) получим

$$dx_i = \Gamma_{ij}^k x_k dx^j.$$

Используя эти соотношения и одну из формул (35), найдем

$$(d\xi^k + \Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j) x_k = 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости векторов x_k имеем

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j. \quad (36)$$

Величины Γ_{ij}^k , входящие в формулу (36), уже знакомы нам. Это символы Кристоффеля 2-го рода (см. формулу (1) § 8 главы 3). Их называют также *коэффициентами связности* — они связывают координаты ξ^i вектора ξ в точке (x^1, \dots, x^n) с координатами $\xi^i + d\xi^i$ этого вектора в близкой точке $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$.

Соотношения (36) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, неизвестными в которых являются координаты $\xi^i(t)$ вектора ξ , параллельно переносимого вдоль кривой (34). Интегрируя эту систему, получим координаты $\xi^i(t)$ вектора ξ в произвольной точке $M(t)$ кривой (34) в базисе $x_i(M(t))$.

Соотношения (36) называются *уравнениями параллельного переноса вектора*.

6. Векторы в псевдоримановом пространстве

Векторы в псевдоримановом пространстве вводятся в полной аналогии с введением векторов в римановом пространстве.

Пусть $V_{p,q}^n$ — псевдориманово пространство с метрическим тензором $g_{ij}(x_1, \dots, x^n)$, $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ — некоторая его точка, $E_{p,q}^n$ — касательное псевдоевклидово пространство в точке M_0 с метрическим тензором $g_{ij} = g_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Пусть e_1, \dots, e_n — базис в пространстве $E_{p,q}^n$, связанный с координатами x^1, \dots, x^n . Тогда по заданным в точке M_0 числам ξ^1, \dots, ξ^n определяется вектор

$$\xi = \xi^1 e_1 + \dots + \xi^n e_n = \xi^i e_i$$

в пространстве $E_{p,q}^n$. Вектор ξ мы будем называть вектором в псевдоримановом пространстве $V_{p,q}^n$ в данной точке M_0 .

Перейдем в пространстве $V_{p,q}^n$ к новым координатам

$$x^i = x^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Тогда базисные векторы e_i пространства $E^{n,p,q}$ преобразуются по формулам

$$'e_k = e_i a_k^i, \quad k = 1, \dots, n, \quad (37)$$

где $a_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial' x^k} \Big|_{M_0}$. Ясно, что

$$e_i = 'e'_k a_i^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (38)$$

где $'a_i^k = \frac{\partial' x^k}{\partial x^i} \Big|_{M_0}$.

Сравнивая выражения

$$\xi = \xi^i e_i = \xi^i 'e'_k a_i^k = (\xi^i 'a_i^k) 'e_k$$

и

$$\xi = ' \xi^k 'e_k,$$

получим формулы преобразования координат $'\xi^k$ и ξ^i вектора ξ :

$$' \xi^k = \xi^i 'a_i^k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (39)$$

Аналогично получают и формулы

$$\xi^i = ' \xi^k a_k^i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (40)$$

При помощи формул (39), (40) можно дать такое определение вектора в псевдоримановом пространстве:

вектором ξ в точке M_0 псевдориманова пространства $V^{n,p,q}$ называется упорядоченный набор n чисел ξ^1, \dots, ξ^n — *координат вектора* ξ , преобразующийся при переходе от координатной системы (x^i) к координатной системе $('x^k)$ по формулам (39), (40), в которых

$$a_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial' x^k} \Big|_{M_0}, \quad 'a_i^k = \frac{\partial' x^k}{\partial x^i} \Big|_{M_0}.$$

7. Параллельный перенос векторов в псевдоримановом пространстве

Пусть точки M_0 и M_1 пространства $V^{n,p,q}$ соединены кривой $\overline{M_0 M_1}$:

$$x^i = x^i(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (41)$$

Пусть ξ — вектор в точке M_0 пространства $V^{n,p,q}$.

Уравнения

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij} \xi^i dx^j \quad (42)$$

называются *уравнениями параллельного переноса* вектора $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ в псевдоримановом пространстве $V^{n,p,q}$.

Система (42) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестными являются координаты $\xi^i(t)$ вектора ξ , параллельно переносимого вдоль кри-

вой (41), а символы Кристоффеля Γ^k_{ij} вычисляются в точках этой кривой.

8. Параллельный перенос тензоров

Дословно повторяя рассуждения пункта 4° § 3 главы 4, можно получить уравнения параллельного переноса тензоров в псевдоримановом пространстве.

Будем говорить, что тензор T переносится параллельно вдоль кривой L пространства $V^n_{p,q}$, если в каждой точке M кривой L его компоненты сохраняют постоянные значения относительно параллельно переносимого вдоль этой кривой базиса.

Запишем общую формулу параллельного переноса тензора T типа $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$:

$$dT^i_{h \dots j_s} = \left(-\Gamma^i_{km} T^{m i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} - \dots - \Gamma^i_{km} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} - \dots + \Gamma^m_{k j_1} T^{i_1 \dots i_r}_{m j_2 \dots j_s} + \dots + \Gamma^m_{k j_s} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{s-1} m} \right) dx^k.$$

9. Абсолютный дифференциал и абсолютная производная

Абсолютным (ковариантным) дифференциалом тензора T называется главная линейная часть приращения тензора $T(t+dt)$, параллельно перенесенного в точку $M(t)$, и тензора $T(t)$, взятого в этой точке.

Например, для тензора T^i_{rs} типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ формула для абсолютно го дифференциала имеет следующий вид:

$$DT^i_{rs} = dT^i_{rs} + \{ \Gamma^i_{kp} T^{pj}_{rs} + \Gamma^i_{kp} T^{ip}_{rs} - \Gamma^p_{kr} T^i_{ps} - \Gamma^p_{ks} T^i_{rp} \} dx^k.$$

Мы не выписываем формулу для общего случая, отсылая читателя к пункту 5° § 3 главы 4. Там же читатель найдет формулы для вычисления абсолютной (ковариантной) производной тензора.

Отметим в заключение, что абсолютный дифференциал метрического тензора g_{ij} псевдориманова пространства $V^n_{p,q}$ равен нулю. Тем самым метрический тензор пространства $V^n_{p,q}$ образует в нем поле параллельных тензоров.

10. Геодезические линии в псевдоримановом пространстве

Геодезические линии в римановом пространстве были введены нами двумя способами — как линии постоянного направления и как экстремали функционала длины (кривые минимальной длины, соединяющие две заданные точки).

В случае псевдориманова пространства ввести геодезические как экстремали не представляется возможным. Для пояснения обратимся к частному случаю — псевдоевклидовой плоскости $E^2_{1,1}$. Линейный элемент ds^2 плоскости $E^2_{1,1}$ задается формулой

$$ds^2 = dx^1{}^2 - dx^2{}^2. \quad (43)$$

Обратимся к координатной плоскости (x^1, x^2) , считая, что на ней введена метрика (43). Тогда отрезки прямых, параллельных бис-

сектрисам координатных углов, имеют нулевую длину и поэтому любые две точки P и Q этой плоскости можно соединить ломаной нулевой длины. Этот пример показывает, что вариационный подход к проблеме геодезических в случае псевдориманова пространства неосуществим (рис. 13).

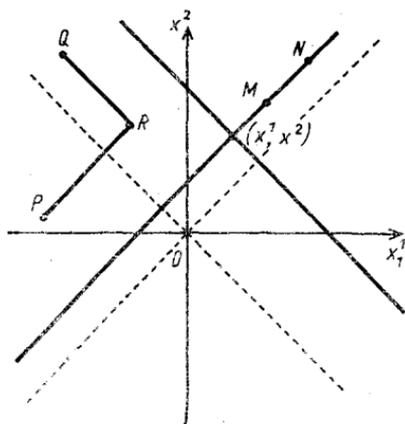


Рис. 13. Псевдоевклидова плоскость $E^2_{1,1}$ с метрикой $ds^2 = dx^1{}^2 - dx^2{}^2$. Через каждую точку (x^1, x^2) проходят две прямые, параллельные биссектрисам координатных углов. Расстояние между любыми точками M и N на каждой из этих прямых равно нулю. Произвольно взятые точки P и Q можно соединить ломаной PRQ , длина которой равна нулю, — звенья этой ломаной параллельны биссектрисам координатных углов и имеют длины, равные нулю

Однако первый путь — введение геодезических как линий постоянного направления — дает нужный результат. При этом уравнения геодезических будут такими же, как и в случае риманова пространства.

Кривая L в псевдоримановом пространстве $V^n_{p,q}$ называется *геодезической линией*, если любой вектор касательной к кривой L в какой-либо ее точке при параллельном переносе вдоль L остается вектором касательной этой кривой. Тем самым геодезическая линия — это линия постоянного направления.

Пусть L — геодезическая в пространстве $V^n_{p,q}$, заданная параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

и $\xi^i(t_0)$ — вектор касательной к кривой L в точке M_0 . Перенесем этот вектор параллельно вдоль кривой L в точку M , отвечающую значению параметра t из промежутка $[t_0, t_1]$, и получим в точке M вектор касательной $\xi^i(t)$. Так как $\frac{dx^i}{dt}$ также вектор касательной к L в точке M и все векторы касательной к кривой L в точке M коллинеарны, то

$$\frac{dx^i}{dt} = \alpha(t) \xi^i(t), \quad \alpha(t) \neq 0. \quad (44)$$

Возникает естественный вопрос: нельзя ли выбрать на геодезической L новый параметр $\tau = \tau(t)$ так, чтобы вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ в каждой ее точке получался параллельным переносом вектора $\frac{dx^i}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0}$?

Покажем, что это возможно.

Параметр τ введем при помощи соотношения

$$\tau = \int \alpha(t) dt,$$

т. е.

$$d\tau = \alpha(t) dt, \quad \frac{d\tau}{dt} = \alpha.$$

Отсюда и из формулы (44) получаем, что

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\alpha} \frac{dx^i}{dt}.$$

Но $\xi^i(t)$ — вектор касательной к геодезической L , полученный параллельным переносом вдоль нее вектора $\xi^i(t_0)$. Поэтому последнее равенство означает, что вектор касательной $\frac{dx^i}{d\tau}$ получается параллельным переносом вдоль геодезической L какого-то вектора касательной $\frac{dx^i}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0}$.

Параметр τ , для которого векторы касательных $\frac{dx^i}{d\tau}$ образуют вдоль геодезической поле параллельных векторов, называется *каноническим*. Ясно, что если τ — канонический параметр, то и $\tau^* = A\tau + B$ ($A \neq 0$ и B — постоянные числа) также является каноническим параметром.

Итак, если геодезическая существует, то на ней можно выбрать в качестве параметра канонический параметр.

Справедливо следующее *утверждение*:

из каждой точки псевдориманова пространства по заданному в этой точке направлению исходит единственная геодезическая линия.

* Пусть $x^i = x^i(\tau)$ — параметрические уравнения геодезической и τ — канонический параметр. Тогда вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ вдоль искомой геодезической ($x^i(\tau)$ — неизвестные функции) переносится параллельно и, значит,

$$d \left(\frac{dx^k}{d\tau} \right) = -\Gamma_{ij}^k \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right) dx^j \quad (k=1, \dots, n).$$

Запишем последние соотношения в эквивалентной форме, поделив обе части на $d\tau$:

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}. \quad (45)$$

Соотношения (45) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных в некоторой области изменения переменных x^1, \dots, x^n — координат в пространстве $V^n_{p,q}$. В этой области задан метрический тензор g_{ij} и, следовательно, Γ^k_{ij} — известные функции.

Соотношения (45) называются *дифференциальными уравнениями геодезических*.

По условию заданы точка M и направление b в этой точке. Пусть a^i — координаты точки M , а b^i — координаты вектора b :

$$x^i|_{\tau=\tau_0} = a^i, \quad \left. \frac{dx^i}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} = b^i. \quad (46)$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что система (45) при начальных данных (46) имеет единственное решение $x^i = x^i(\tau)$.

Итак, в псевдоримановом пространстве $V^n_{p,q}$ определяется единственная геодезическая, исходящая из точки M в заданном направлении b . *

На этом мы завершаем изложение некоторых фактов теории псевдоримановых пространств. Они во многом похожи на римановы пространства. Но есть и существенные различия. Кое-где мы подчеркивали их. Главное отличие связано с измерением длин — в псевдоримановых пространствах имеются реальные кривые нулевой длины.

§ 5. ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

Использование параметрического способа задания кривых и поверхностей в прикладных задачах часто оказывается удобным во многих отношениях. Освобождая от привязки к какой-то определенной системе координат, это упрощает вычисления, построение графических изображений на экране дисплея, весьма полезно при конструировании достаточно гладких составных кривых и поверхностей по заданному остову.

В этом параграфе мы коротко остановимся на некоторых подходах к конструированию кривых и поверхностей, отсылая читателей за подробностями к книге А. Фокса и М. Пратта «Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве» (М.: Мир, 1982).

1°. Уравнение отрезка кривой

Пусть M_0 и M_1 — фиксированные точки пространства E^3 с радиус-векторами \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_1 соответственно. Зададим в этих точках ненулевые векторы T_0 и T_1 и попробуем провести через точки M_1 и M_0 какую-нибудь кривую, касательные векторы которой в точках M_0 и M_1 совпадали бы с заданными векторами (рис. 14).

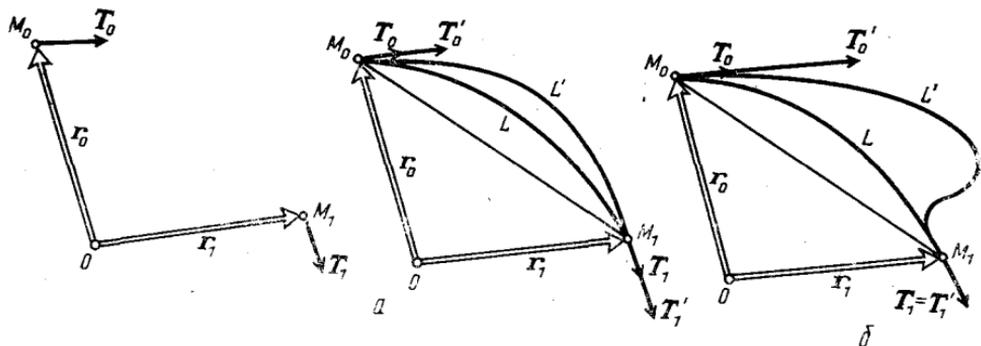


Рис. 14. $T_0' = \alpha_0 T_0$, $T_1' = \alpha_1 T_1$; а — при $\alpha_0 > 1$ и $\alpha_1 > 1$ кривая L' является более полной, чем кривая L ; б — $\alpha_0 \gg 1$, $\alpha_1 = 1$

Рассмотрим кривую L , заданную радиусом

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + t\mathbf{a}_1 + t^2\mathbf{a}_2 + t^3\mathbf{a}_3 \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (1)$$

и потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_1, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{T}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(1) = \mathbf{T}_1. \quad (2)$$

Находя векторные коэффициенты \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 из вытекающих из условий (2) соотношений

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 = \mathbf{T}_1,$$

получим

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{a}_2 = 3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) - 2\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_1, \quad \mathbf{a}_3 = 2(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) + \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1. \quad (3)$$

Подставим выражения (3) для векторов \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 в формулу (1) и запишем полученные соотношения в следующей матричной форме (форме Фергюсона):

$$\mathbf{r}(t) = (1 \ t \ t^2 \ t^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{T}_0 \\ \mathbf{T}_1 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (4)$$

Кривая с радиусом (4) является искомой. Ясно, что вид этой кривой существенно зависит от направлений и длин касательных векторов в опорных точках.

При перегруппировке слагаемых многочлен (1) можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (1-t)^3 \mathbf{r}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{r}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{r}_2 + t^3 \mathbf{r}_3 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (5)$$

(достаточно положить $\mathbf{a}_0 = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}_1 = 3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$, $\mathbf{a}_2 = 3(\mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0)$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{r}_3 - 3\mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$). Из формулы (5) получаем, что

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_3, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = 3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \quad \dot{\mathbf{r}}(1) = 3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2). \quad (6)$$

Тем самым кривая (5) проходит через точки M_0 и M_3 , задаваемые векторами \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_3 , а векторы касательных к кривой в этих точках коллинеарны соответственно векторам $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$.

Ломаная $M_0M_1M_2M_3$ называется *характеристической ломаной кривой* (5) (рис. 15).

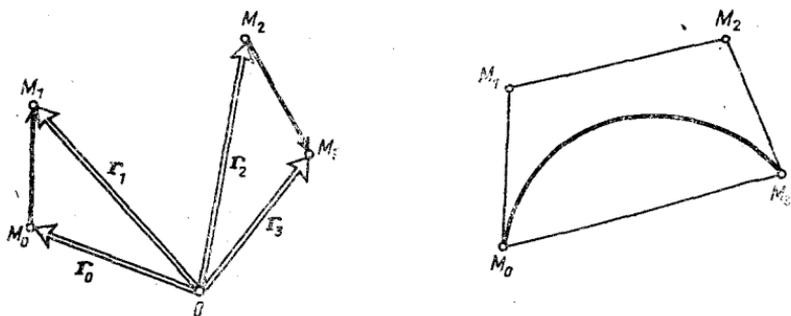


Рис. 15. $M_0M_1M_2M_3$ — характеристическая ломаная кривой

В матричной форме запись уравнения кривой (5) выглядит так (*форма Безье*):

$$\mathbf{r}(t) = (1 \ t \ t^2 \ t^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (7)$$

Полученная кривая регулярна. Вычислим, например, ее кривизну в граничных точках. Имеем

$$k_1(0) = \frac{2}{3} \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|^3}, \quad k_1(1) = \frac{2}{3} \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)|}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

2°. Уравнение криволинейного четырехугольника

Предложенный в предыдущем пункте способ задания кривой в форме (1) может быть обобщен на случай поверхности.

Рассмотрим векторное параметрическое уравнение вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} u^i v^j \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1), \quad (8)$$

или, в матричной форме,

$$\mathbf{r}(u, v) = (1 \ u \ u^2 \ u^3) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для задания поверхности уравнением (8) необходимо определить

векторные коэффициенты a_{ij} ($i=0, 1, 2, 3, j=0, 1, 2, 3$). Требуемые шестнадцать условий получим, в частности, задавая в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ плоскости параметров u и v значения векторов $\Gamma, \Gamma_u, \Gamma_v, \Gamma_{uv}$, т. е. радиус-векторы опорных точек, векторы касательных к координатным линиям $u=0, u=1, v=0$ и $v=1$ и меру «закрученности» поверхности в этих точках (рис. 16).

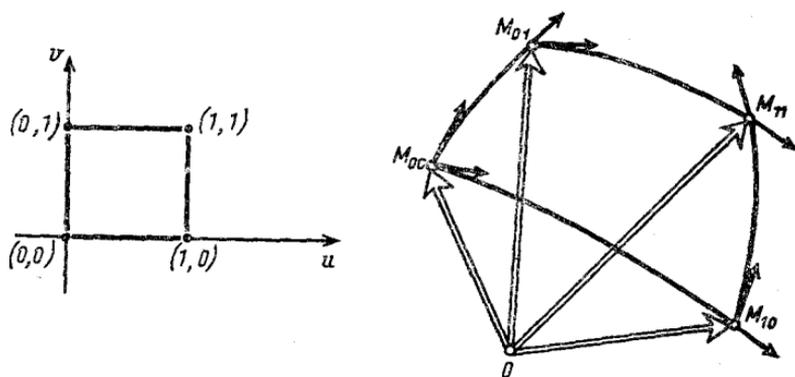


Рис. 16. Криволинейный четырехугольник

Обобщая формулу Безье (5) для кривой, получим уравнение криволинейного четырехугольника в следующей форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \sum_{i,j=0}^3 \mathbf{r}_{ij} g_i(u) g_j(v) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1), \quad (10)$$

где \mathbf{r}_{ij} — вершины характеристического многогранника и $g_i(t) = t^i(1-t)^{3-i}$. Самой поверхности принадлежат только опорные точки $M_{00}, M_{03}, M_{30}, M_{33}$, определяемые векторами $\Gamma_{00}, \Gamma_{03}, \Gamma_{30}, \Gamma_{33}$. Векторы $\Gamma_{i0}, \Gamma_{i1}, \Gamma_{i2}, \Gamma_{i3}$ ($i=0, 3$) и $\Gamma_{0j}, \Gamma_{1j}, \Gamma_{2j}, \Gamma_{3j}$ ($j=0, 3$) задают характеристические ломаные граничных кривых криволинейного четырехугольника. Векторы $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}$ определяют меру «закрученности» поверхности в опорных точках (рис. 17).

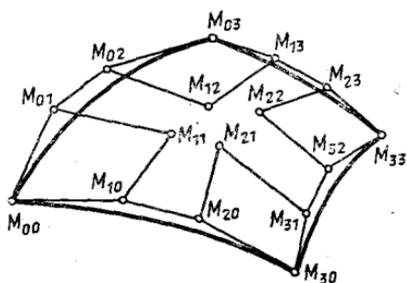


Рис. 17. Характеристический многогранник поверхности

и, приписывая векторам касательных в опорных точках найденные значения, получаем составную кривую с непрерывной кривизной (рис. 18).

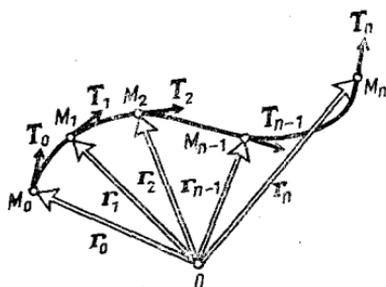


Рис. 18. Составная кривая

Аналогично можно построить составную кривую Безье, обеспечив непрерывность изменения ее наклона и кривизны.

4°. Составные поверхности

Пусть S — некоторая заданная поверхность. Набросим на нее сеть наподобие рыболовной сети, состоящую из конечного числа кривых двух разных семейств. Зафиксировав положение этой сети в пространстве, удалим поверхность и рассмотрим одну из ячеек сети (рис. 19).

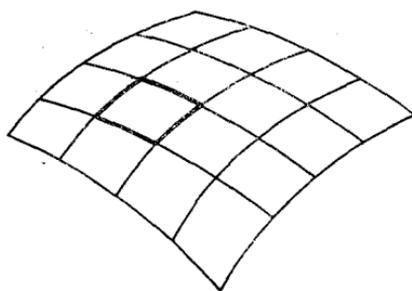


Рис. 19. Ячейки поверхности

Допустим, что вдоль сторон этой ячейки (граничных кривых) параметры u и v изменяются в пределах от 0 до 1, так, что одна пара противоположных опорных отрезков задается уравнениями

$$r = r(u, 0), 0 \leq u \leq 1; \quad r = r(u, 1) \quad (0 \leq u \leq 1), \quad (15)$$

а другая (рис. 20) —

$$r = r(0, v), 0 \leq v \leq 1; \quad r = r(1, v) \quad (0 \leq v \leq 1) \quad (16)$$

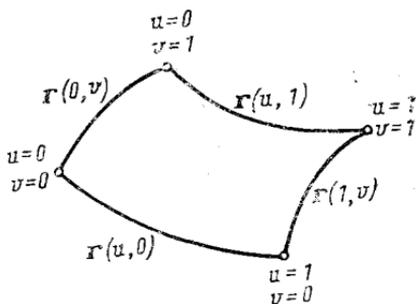


Рис. 20. Отдельная ячейка

Поверхности

$$r_1(u, v) = (1-v)r(u, 0) + vr(u, 1) \quad (0 \leq u, v \leq 1); \quad (17)$$

$$r_2(u, v) = (1-u)r(0, v) + ur(1, v) \quad (0 \leq u, v \leq 1),$$

получены линейной интерполяцией, учитывающей только пару (15) или (16) соответственно, и опираются только на часть границы. Для того чтобы найти уравнения поверхности, опирающейся на все кривые (15) и (16), следует рассмотреть линейную комбинацию

$$r = r_1 + r_2 - r_3,$$

где $r_3 = (1-u)(1-v)r(0, v) + u(1-v)r(1, 0) + (1-u)vr(0, 1) + uv r(1, 1)$ (рис. 21).

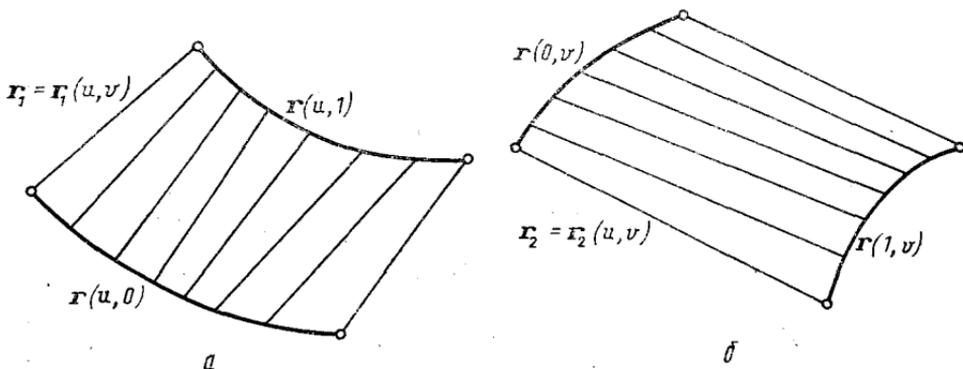


Рис. 21. Линейные интерполяции

Записывая окончательный результат в матричной форме

$$r(u, v) = (1 - u^* u) \begin{pmatrix} r(0, v) \\ r(1, v) \end{pmatrix} + (r(u, 0) \overset{r^*}{r}(u, 1)) \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix} + \\ + (1 - u u) \begin{pmatrix} r(0, 0) & r(0, 1) \\ r(1, 0) & r(1, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix}, \quad (18)$$

легко убеждаемся в том, что поверхность с вектором (18) опирается на все четыре граничные кривые.

В качестве *функций смещения* вместо $1 - u$ и u можно выбирать любые неотрицательные функции $\alpha_0(u)$, $\alpha_1(u)$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_0 + \alpha_1 = 1, \quad \alpha_0(0) = 1, \quad \alpha_0(1) = 0, \quad \alpha_1(0) = 0, \quad \alpha_1(1) = 1. \quad (19)$$

Имея сеть кривых, можно сконструировать составную поверхность, заполнив ее ячейки описанным выше способом.

Гладкость составной поверхности достигается более сложным, нагруженным описанием ячейки поверхности, не только через граничные кривые, но и путем задания в точках этих кривых векторов $r_u(0, v)$, $r_u(1, v)$, $r_v(u, 0)$, $r_v(u, 1)$ и r_{uv} в ее вершинах.

Рассмотрим, например, криволинейный четырехугольник, задаваемый вектором

$$r = r(u, v) = (\alpha_0(u) \alpha_1(u) \beta_0(u) \beta_1(u)) \begin{pmatrix} r(0, v) \\ r(1, v) \\ r_u(0, v) \\ r_u(1, v) \end{pmatrix} + \\ + (r(u, 0) \ r(u, 1) \ r_v(u, 0) \ r_v(u, 1)) \begin{pmatrix} \alpha_0(v) \\ \alpha_1(v) \\ \beta_0(v) \\ \beta_1(v) \end{pmatrix} - \\ - (\alpha_0(u) \alpha_1(u) \beta_0(u) \beta_1(u)) R \begin{pmatrix} \alpha_0(v) \\ \alpha_1(v) \\ \beta_0(v) \\ \beta_1(v) \end{pmatrix},$$

где матрица R задается формулой (12), а функции смещения α_0 , α_1 , β_0 , β_1 удовлетворяют соотношениям (19) и дополнительным условиям

$$\alpha'_0(0) = \alpha'_0(1) = \alpha'_1(0) = \alpha'_1(1) = 0, \\ \beta_0(0) = \beta_0(1) = \beta_1(0) = \beta_1(1) = 0, \quad (20)$$

$$\beta'_0(0) = 1, \quad \beta'_0(1) = 0, \quad \beta'_1(0) = 0, \quad \beta'_1(1) = 1.$$

Используя такие заполнения ячеек, можно добиться того, что поле нормалей на построенной поверхности будет непрерывным, и значит, построить всюду гладкую составную поверхность.

В уравнении

$$\mathbf{r}(u, v) = (\alpha_0(u) \alpha_1(u) \beta_0(u) \beta_1(u)) \mathbf{R} (\alpha_0(v) \alpha_1(v) \beta_0(v) \beta_1(v))^T,$$

где функции $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ подчинены условиям (19)—(20), заполнение ячейки полностью определяется через векторы $\mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv}$ в ее вершинах. При построении составной поверхности достаточно добиться совпадения векторов $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv}$ в смежных углах соседних ячеек — и полученная поверхность будет гладкой (рис. 22).

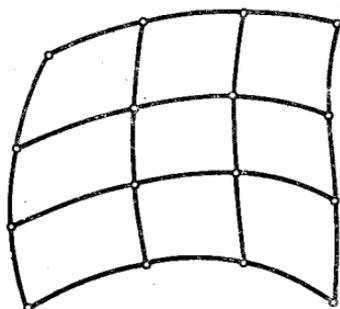


Рис. 22. Составная поверхность

1. Аминов Ю. А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. — М.: Наука, 1987.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
3. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — М.: Наука, 1971.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1986.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
6. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. — М.: Мир, 1972.
7. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
8. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
9. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.
10. Шикин Е. В. Линейные пространства и отображения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
11. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.

Научное издание

ПОЗНЯК Эдуард Генрихович
ШИКИН Евгений Викторович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО

Зав. редакцией *Н. М. Глазкова*
Редакторы *Р. Д. Солод, Т. В. Властовская*
Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*
Переплет художника *В. Б. Гордона*
Технический редактор *Н. И. Смирнова*
Корректоры *Н. В. Рыбакова, Н. А. Можева*

ИБ № 3671

Сдано в набор 16.02.90 Подписано в печать 10.01.91.
Формат 60×90/16 Бумага тип. № 2
Гарнитура литературная Высокая печать
Усл. печ. л. 24,0 Уч.-изд. л. 23,07
Тираж 8600 экз. Заказ 259 Изд. № 1199
Цена 3 р. 50 к.

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета,
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы